Licence 3 Algèbre
2016-2017

Université Paris Diderot

Feuille de TD 5–sous-groupes de Sylow

Exercice 1. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20 ?

Exercice 2. Décrire les 3-sous-groupes de Sylow de A_3, A_4 et A_6. Décrire les 2-sous-groupes de Sylow de A_4 et Σ_4. Combien y a-t-il de 7-sous-groupes de Sylow dans Σ_9?

Exercice 3. Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe fini G satisfaisant $|H||K| = |G|$ et $H \cap K = \{e\}$. Montrer que G est isomorphe à $H \times K$. En déduire que tout groupe d'ordre 15 est cyclique.

Exercice 4. Soit G un groupe d'ordre 30. Montrer que si G n'a pas un unique 5-sous-groupe de Sylow alors il a un unique 3-sous-groupe de Sylow . En déduire que G n'est pas simple. En utilisant la mÃªme technique, montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre 6. Montrer que G a un unique 3-sous-groupe de Sylow . Montrer que si G n'a qu'un 2-sous-groupe de Sylow, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Supposons que G a plus d'un 2-sous-groupe de Sylow, et soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des 2-sous-groupes de Sylow de G. Montrer que l'action par conjugaison de G sur $\mathcal{H}$ est fidèle et en déduire que G est isomorphe à Σ_3. Montrer que D_3 est isomorphe à Σ_3.

Exercice 6. Soit G un groupe fini d'ordre $n = 2^k m$ où $k > 1$ et $m > 1$ impair. Soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G. On rappelle que pour $\sigma \in \Sigma_n$, la signature de σ est définie par $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-m(\sigma)}$, où $m(\sigma)$ désigne le nombre d'orbites de σ. On rappelle également que l'application $G \to S(G)$ qui à $h \in G$ associe la bijection σ_h définie par $\sigma_h(g) = hg$ est injective. On identifiera par la suite $S(G)$ à Σ_n.

1. Supposons que S soit cyclique engendré par h. On considère l'action du groupe $S \times G \to G$ qui à (h^i, g) associe $h^i g$. Quel est le stabilisateur d'un élément $x \in G$? Montrer que l'orbite de $x \in G$ pour cette action est identique à l'orbite de $x \in G$ sous l'action de σ_h. En déduire que $m(\sigma_h) = m$, puis que $\epsilon(\sigma_h) = -1$.
2. Supposons que G soit simple et que $n = 2m$ avec m impair. En utilisant la question précédente, montrer que le morphisme de groupes $G \to \{-1, 1\}$ qui à g associe la signature de σ_g est surjectif. En déduire une contradiction et énoncer un théorème.

Exercice 7. Soient G un groupe, F un sous-groupe de G, p un nombre premier tel que p divise $|F|$. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de G. Montrer que le stabilisateur $\mathrm{Stab}_F(aS)$ de aS pour l'action de F sur G/S par translation à gauche est $F \cap aSa^{-1}$. En écrivant l'équation aux classes, montrer qu'il existe $a \in G$ tel que $[F : \mathrm{Stab}_F(aS)]$ est premier à p, c'est-à-dire que $Stab_F(aS)$ est un p-sous-groupe de Sylow de F.

Exercice 8. Soit G un groupe d'ordre pq^2, avec p et q premiers entre eux ; on se propose de montrer que G n'est pas simple. Etudier le cas où $p < q$ (on cherchera le nombre de q-sous-groupes de Sylow de G). On suppose que $p > q$; montrer que le nombre n_p de p-sous-groupes de Sylow de G vaut 1, q ou q^2. Dans la cas où $n_p = q^2$, compter le nombre d'éléments de G et en déduire qu'il n'y a qu'un seul q-Sylow. Conclure.

Exercice 9. Soit G un groupe d'ordre 24. On suppose qu'aucun des sous-groupes de Sylow de G n'est distingué. Le but de l'exercice est de montrer que G est isomorphe à Σ_4.

1. Montrer que G possède trois sous-groupes de Sylow d'ordre 8; on note $F = \{P_1, P_2, P_3\}$ l'ensemble de ces sous-groupes. Montrer que G possède quatre sous-groupes de Sylow d'ordre 3; on note $E = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ l'ensemble de ces sous-groupes. Montrer que G possède exactement 8 éléments d'ordre 3.

2. On considère l'action de G par conjugaison sur E et on note G_{H_i} le stabilisateur de H_i pour cette action. On lui associe le morphisme de groupes $\varphi : G \to S(E)$. On identifiera par la suite $S(E)$ à S_4.

   (a) Montrer que $\ker \varphi = \cap_i G_{H_i}$

   (b) Montrer que $G_{H_i} = 6$ puis que $|\ker \varphi| \leq 3$. En déduire que $|\ker \varphi| \leq 2$ (on utilisera que $\ker \varphi$ est distingué dans G).

3. Considérons maintenant l'action par conjugaison de G sur F.

   (a) Montrer que le stabilisateur de P_i dans G pour cette action est P_i lui-même. En déduire que l'on peut restreindre l'action en une action de P_1 par conjugaison sur $F \setminus \{P_1\} = \{P_2, P_3\}$. Montrer que l'ordre de $P_1 \cap P_2$ est 4 et que $P_1 \cap P_2 \subset P_3$. En déduire que $P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est d'ordre 4.

   (b) En comptant les éléments contenus dans H_i et P_j, $1 \leq i \leq 4$ et à l'aide d'un dessin montrer que : $\forall x \in G, \exists i$ tel que $x \in H_i$ ou $\exists j$ tel que $x \in P_j$.

   (c) En déduire que G_H n'a pas d'éléments d'ordre 6 et donc qu'il est isomorphe à Σ_3.

4. On suppose par l'absurde que $\ker \varphi = \{e, x\}$

   (a) Montrer que x commute avec tous les éléments de G et donc que $x \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

   (b) Soient $H \in E$ et $P \in F$ fixés. En considérant l'action de G_H sur F, montrer que l'ordre de $G_H \cap P$ est 2, puis que $G_H \cap P = \{e, x\}$.

   (c) Déduire une contradiction en considérant les éléments de G_H. Puis conclure que G est isomorphe à Σ_4.

Exercice 10.

1. Factoriser le nombre 2015 en produit de facteurs premiers.

2. Soit G un groupe d'ordre 2015. Montrer qu'il ne possède qu'un seul 13-sous-groupe de Sylow, noté G_{13}.

3. Montrer que G_{13} est cyclique. Combien G_{13} a-t-il de générateurs ?

4. Montrer que G opère sur G_{13} par conjugaison.

5. Montrer que l'orbite d'un générateur de G_{13} est formée de générateurs de G_{13}, et donc que G opère sur les générateurs de G_{13}. On note d le cardinal des orbites sous cette action.

6. Soit ξ un générateur de G_{13}. Soit p un nombre premier à 13. Montrer que l'orbite de ξ^p pour l'action de G est en bijection avec l'orbite de ξ. On note $O(\xi)$ l'orbite de ξ pour l'action de G par conjugaison.

7. Montrer que $12 = d$ Card $(O(\xi))$. Quels sont les choix possibles pour Card$(O(\xi))$?

8. Montrer que tout élément de G_{13} commute à tout élément de G.