Licence 3 Algèbre
2015-2016

Université Paris Diderot

Feuille de TD5–Groupe symétrique

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Pour chaque $1 \leq k \leq n$, posons $B_k = \{\sigma \in \Sigma_n, \sigma(n) = k\}$. Montrer que B_n est un sous-groupe de Σ_n isomorphe à Σ_{n-1}. Montrer qu'il existe une bijection $B_k \to B_n$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 2. Pour chacune des permutations de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ suivantes, décomposer les en produits de cycles disjoints et donner leur ordre:

$$a = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 564732189 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 143278659 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 378945216 \end{pmatrix}.$$

Calculer a^{201}, b^{198} et c^{1000}, b^2c dans Σ_9.

Exercice 3.–Montrer que deux cycles du groupe Σ_n des permutations qui commutent sont à supports égaux ou disjoints. Que pensez-vous de la réciproque? Soit c un k-cycle de Σ_n. Quel est son ordre ? Quels sont les $\sigma \in \Sigma_n$ qui commutent avec c? Montrer que si $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$ sont à supports disjoints alors l'ordre de $\sigma\sigma'$ est le ppcm des ordres de σ et de σ'. Soit $\sigma \in \Sigma_n$ décomposée en produit de cycles à supports disjoints $\sigma = c_1 \ldots c_k$. Montrer que l'ordre de σ est le ppcm des ordres des c_i. Quel est l'ordre maximal des éléments de Σ_3, Σ_4 et Σ_5 ? Montrer que Σ_7 ne possède aucun élément d'ordre 15.

Exercice 4. Montrer que les 4-cycles engendrent Σ_n pour tout $n \geq 4$.

Exercice 5. Soit k un entier ≥ 2. Montrer que deux k-cycles sont toujours conjugués dans Σ_n. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux permutations soient conjuguées dans Σ_n.

Exercice 6. En faisant agir le groupe D_8 des isométries du carré $ABCD$ sur les sommets de ce carré, constuire un morphisme $\varphi : D_8 \to \Sigma_4$. Le sous-groupe $\varphi(D_8)$ est-il distingué? Décrivez ses éléments.

Exercice 7. Montrer que la signature d'une permutation décomposée en produit de k-cycles à supports disjoints est $(-1)^{|\mathrm{supp}(\sigma) - k}$ où $\mathrm{supp}(\sigma)$ désigne le support de σ.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$, et soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, notons $M_\sigma \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice correspondant, dans la base $\mathcal{B}$, à l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi_\sigma : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^n \\ e_i &\mapsto e_{\sigma(i)}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que $\phi_\sigma \circ \phi_\tau = \phi_{\sigma\tau}$. En déduire que M_σ est inversible, et que $\phi : \Sigma_n \to GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un homomorphisme injectif de groupes.

(b) Montrer que la signature de σ est égale au déterminant de M_σ.

(c) Quelle information sur σ nous est donnée par la trace de M_σ ?

Exercice 9. Soit $n \geq 2$, et soit $G < \Sigma_n$ un sous-groupe qui contient au moins une permutation impaire.

1. Montrer que $G\mathcal{A}_n := \{ga \in \Sigma_n \mid g \in G,\ a \in \mathcal{A}_n\} \subset \Sigma_n$ est un sous-groupe de Σ_n, puis que c'est Σ_n.

2. Montrer que si $G \cap \mathcal{A}_n$ est d'ordre m, alors G est d'ordre $2m$.

Exercice 10.

1. Déterminer le nombre de classes de conjugaison de Σ_4, leur cardinal, et un système de représentants de ces classes.

2. En déduire le centre de Σ_4.

3. Montrer que tout sous-groupe distingué d'un groupe fini quelconque G est une réunion de classes de conjugaison. Déterminer les sous-groupes distingués de Σ_4, en les exprimant comme réunion de classes de conjugaison.

4. Montrer que pour un groupe G, on a $G/Z(G)$ est isomorphe au groupe $\operatorname{Int} G$ des automorphismes intérieurs de G. En déduire que $\operatorname{Int} \Sigma_4$ est isomorphe à Σ_4.

5. Soit G un groupe et φ un automorphisme de G. Montrer que si C_x désigne la classe de conjugaison de $x \in G$ alors $\varphi(C_x) = C_{\varphi(x)}$.

6. En déduire que tout automorphisme φ de Σ_4 envoie une transposition sur une transposition, un produit de deux 2-cycles sur un produit de deux 2-cycles.

7. En déduire que tout automorphisme de Σ_4 est un automorphisme intérieur, et que $Aut(\Sigma_4)$ est isomorphe à Σ_4.

Exercice 11. Soit p un nombre premier ne divisant pas n et G un sous-groupe de Σ_n d'ordre p^k. Montrer qu'il existe un point fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ commun à tous les éléments de G.

Exercice 12. Notons $P = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ l'ensemble des paires d'éléments de $\{1,2,3,4\}$. Notons $\mathcal{S}(P)$ le groupe des permutations de P et $\mathcal{A}(P)$ son sous-groupe alterné. (Ils sont isomorphes à Σ_6 et A_6 respectivement, puisque P possède 6 éléments.)

1. Soit $\sigma \in \Sigma_4$. Montrer que $\phi(\sigma) : P \to P$ qui à $\{i,j\}$ associe $\{\sigma(i),\sigma(j)\}$ est dans $\mathcal{S}(P)$.

2. Montrer que l'application ϕ est un morphisme de groupes $\Sigma_4 \to \mathcal{S}(P)$.

3. Montrer que ce morphisme est injectif.

4. En déduire que le groupe Σ_4 opère sur l'ensemble P sans point fixe.

5. Cette action est-elle transitive ?

6. Montrer que le stabilisateur de $\{1,2\}$ pour l'action de Σ_4 est isomorphe au produit de deux groupes d'ordre 2.

7. Déduire des questions précédentes que le stabilisateur de tout élément de P pour l'action de Σ_4 est isomorphe au produit de deux groupes d'ordre 2.

8. Montrer que l'image par ϕ d'une transposition de $\mathcal{S}_4$ est le produit de deux transpositions à supports disjoints de $\mathcal{S}(P)$.

9. En déduire que l'image de ϕ est contenue dans $\mathcal{A}(P)$.