Licence 3 Algèbre
2015-2016

Université Paris Diderot

Feuille de TD4–Actions de groupes

Exercice 1.– Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. On notera $g \cdot x$ l'action de $g \in G$ sur $x \in X$, $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$ le *stabilisateur* de $x \in X$, $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$ *l'orbite de* x sous l'action de G et $X^G = \{x \in X | g \cdot x = x, \forall g \in G\}$ l'ensemble des *points fixes de* X sous l'action de G.

1. Montrer que G_x est un sous-groupe de G. Montrer qu'on a une bijection entre l'orbite de x et le quotient G/G_x.
2. En déduire que si X est fini $|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} [G : G_x]$ où $\mathcal{R}$ est un système de représentants de la partition de X formée de ses orbites, et $|X|$ désigne le cardinal de X.
3. En déduire que, pour X fini, on a
$$|X| = |X^G| + \sum_{x \in \mathcal{R}, G_x \neq G} [G : G_x].$$
Comment se traduit cette équation aux classes lorsque G, groupe fini, opère par conjugaison sur lui-même ?
4. Soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe d'ordre une puissance d'un nombre premier p. Monter que $|X^G|$ est congru à $|X|$ modulo p. En déduire que, si $G \neq \{e\}$, le centre de G n'est pas réduit à e.

Exercice 2.–Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini X. Posons $E = \{(g, x) \in G \times X / g.x = x\}$. Pour $g \in G$, notons X^g le fixateur de g dans X. Pour $x \in X$, notons G_x le stabilisateur de x dans G. Montrer que $|E| = \sum_{g \in G} |X^g|$. Montrer que $|E| = \sum_{x \in X} |G_x|$. En déduire la *formule de Burnside* : $|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$. (En d'autres termes, le nombre d'orbites est égal au nombre moyen de points fixes.)

Exercice 3. Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. Notons $\mathcal{S}(X)$ le groupe des bijections $X \to X$. Montrer que pour tout $g \in G$ l'application $t_g : x \mapsto g.x$ est une bijection de X. En déduire que l'application $G \mapsto \mathcal{S}(X)$ qui à g associe t_g est un morphisme de groupes. Montrer qu'il est injectif si et seulement l'action de G sur X est fidèle. Lorsque X et G sont finis, et que l'action est fidèle, montrer que $|G|$ divise $|X|!$. Réciproquement montrer que si on a un morphisme d'un groupe G vers $\mathcal{S}(X)$, cela définit une action de groupe.

Exercice 4.–Le groupe $G = GL_n(\mathbb{R})$ opère sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par multiplication à gauche.

1. Décrire la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en orbites pour cette opération.
2. Quel est le stabilisateur du vecteur $(1, 0, \cdots, 0)$?
3. Dans le cas $n = 2$ on considère le sous-groupe H des rotations dans $\mathbb{R}^2$. Donner la décomposition de $\mathbb{R}^2$ en orbites sous l'action de H. Faire un dessin.

Exercice 5.– Soit G le sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ engendré par la multiplication par i. Ce groupe agit sur l'ensemble $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $\mathbb{C}$ en orbites sous l'action de G et calculer le stabilisateur de chaque élément. Faire un dessin.

Exercice 6.–Un groupe G de 35 éléments agit sur un ensemble X de 23 éléments. Montrer qu'il existe un élément de X qui est un point fixe de G.

Exercice 7.– Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de l'ordre de G, et H un sous-groupe de G d'indice p. On se propose de montrer que H est distingué dans G.

1. Montrer-le dans le cas $p = 2$
2. En faisant opérer G par translation sur les classes à gauche modulo H, définir un morphisme non constant $f : G \to S_p$ de G dans le groupe S_p des permutations sur un ensemble à p éléments.
3. Montrer que $\ker f = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$. En déduire que $\ker f$ est un sous-groupe de H puis que $H = \ker f$. Conclure.

Exercice 8. Soit G un sous-groupe du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ des isométries vectorielles de déterminant 1 de $\mathbf{R}^3$. Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ est composé de rotations de $\mathbf{R}^3$ (et de l'identité). Supposons que G n'admette pas de point fixe autre que 0 (autrement dit, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, $x \neq 0$, il existe $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $g.x \neq x$).

1. Soient deux rotations non triviales de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ qui commutent. Montrer qu'elles ont même axe.
2. En déduire que G ne peut pas être commutatif.
3. Cette conclusion est-elle encore valable si on remplace G par un sous-groupe du groupe $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ des isométries vectorielles de $\mathbf{R}^3$?