Licence 3 Algèbre
2015-2016

Université Paris Diderot

Feuille de TD3–Morphismes de groupes, groupes quotients

Exercice 1. Soit G un groupe. Montrer que $x \mapsto x^{-1}$ est morphisme si et seulement si G est un groupe abélien.

Exercice 2. L'image d'un groupe abélien par un morphisme est-elle un groupe abélien ? L'image réciproque d'un groupe abélien par un morphisme est-elle un groupe abélien ?

Exercice 3. Soit G un groupe fini. Déterminer les morphismes de G dans $\mathbf{Z}$.

Exercice 4. Montrer qu'on a un morphisme $\mathbf{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ donné par $\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 5. Soit G un groupe. Soit X une partie génératrice de G. Soit $f : G \to H$ un morphisme. Montrer que $f(X)$ engendre l'image de f. En déduire que $\mathrm{Im}(f)$ est monogène lorsque G est monogène, et que $\mathrm{Im}(f)$ est cyclique d'ordre divisant $|G|$ lorsque G est cyclique. Supposons G abélien et posons $X = \{x_1, x_2, .., x_n\}$. Montrer qu'on a un morphisme $\mathbf{Z}^n \to G$ qui à $(m_1, m_2, ..., m_n) \mapsto x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$. Est-ce encore un morphisme si G n'est pas abélien ?

Exercice 6. Soit G un groupe. Déterminer tous les morphismes $\mathbf{Z} \to G$. Soient n et m deux entiers. En déduire tous les morphismes $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, en particulier lorsque $n = m$ (on s'intéressera à l'image de $\bar{1}$). En déduire tous les automorphismes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 7. Montrer que $H = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 / x + y \in 2\mathbf{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}^2$ et qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

Exercice 8. Soit n un entier ≥ 0. Montrer que l'application déterminant est un morphisme $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^\times$ surjectif. Quel est son noyau ? En déduire un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 9. Montrer que l'application $\mathrm{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbf{R})$ qui à M associe sa transposée ${}^tM$ est un morphisme. En déduire que les applications $M \mapsto M +^t M$ et $M \mapsto M -^t M$ sont aussi des morphismes. Quels sont les images et noyaux de ces morphismes ? Les applications $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui à M associe ${}^tM$, M^{-1} et ${}^tM^{-1}$ respectivement sont-elles des morphismes ?

Exercice 10. Soit G un groupe d'ordre 6. Montrer que s'il n'est pas cyclique il admet un unique sous-groupe d'ordre 3 et trois éléments d'ordre 2. En déduire qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ou au groupe des isométries du triangle équilatéral.

Exercice 11. Le groupe $\mathbf{R}^\times$ est-il isomorphe au groupe $\mathbf{C}^\times$? Le groupe $(\mathbf{C}, +)$ est-il isomorphe au groupe $(\mathbf{C}^\times, \times)$? Soit G un sous-groupe d'indice fini du groupe $\mathbf{C}^\times$. Montrer que $G = \mathbf{C}^\times$.

Exercice 12. Le groupe $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ est-il isomorphe au groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$? Montrer que le groupe produit $G \times G$ n'est pas cyclique lorsque G est un groupe d'ordre > 1.

Exercice 13. Soit G un groupe. Montrer que si G est cyclique tout groupe quotient de G est cyclique. Montrer que le centre $Z(G)$ de G est un sous-groupe distingué de G. Montrer que si $G/\mathrm{Z}(G)$ est un groupe monogène, le groupe G est abélien.

Exercice 14. Soit n un entier > 0. Montrer que $\mu_n = \{z \in \mathbf{C}^\times / z^n = 1\}$ est un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que tous les sous-groupes finis de $\{z \in \mathbf{C}/|z| = 1\}$ sont cycliques. Montrer que le groupe μ est isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. En déduire que le groupe μ_∞ des éléments d'ordre fini de $\mathbf{C}^\times$ est isomorphe à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Montrer que les groupes $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ et μ/μ_∞ sont isomorphes. Montrer que μ est isomorphe à μ/μ_n. Montrer que μ/μ_∞ possède 1 comme unique élément d'ordre fini. Les groupes μ et μ/μ_∞ sont-ils isomorphes ?

Exercice 15. Quels sont les sous-groupe distingués du groupe des quaternions Q_8 ? Indiquer si les groupes quotients sont cycliques. Quels sont les sous-groupes distingués du groupe D_8 des isométries du carré ? Indiquer si les groupes quotients sont cycliques. Le groupe Q_8 est-il isomorphe à D_8 ? Quels sont les groupes d'automorphismes de Q_8 et D_8 ?

Exercice 16. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe d'indice 2 de G. Montrer que G/H et $H\backslash G$ possèdent tout deux deux classes dont l'une est H. En déduire que $G/H = H\backslash G$ et donc que H est distingué dans G. Tout sous-groupe d'indice 3 est-il distingué ?

Exercice 17. Soient G un groupe fini et H un sous-groupe distingué d'ordre n et d'indice m. On suppose que m et n sont premiers entre eux. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre n. On pourra considérer la sujection canonique $G \to G/H$.

Exercice 18. Soient G un groupe et H un sous groupe distingué de G d'indice n. Montrer que pour tout $a \in G$, on a $a^n \in H$. Donner un exemple de sous-groupe H non distingué de G pour lequel il existe $a \in G$ avec $a^n \notin H$.

Exercice 19. Donner un exemple de groupe G muni d'un sous-groupe distingué H avec G non isomorphe à $H \times G/H$. Donner un tel exemple avec G abélien. Donner un tel exemple avec G fini, $|H|$ et $|G/H|$ premiers entre eux. Y a-t-il de tels exemples avec G abélien fini, $|H|$ et $|G/H|$ premiers entre eux ?

Exercice 20. Soient G un groupe et A une partie de G. Posons $N(A) = \{g \in G; gAg^{-1} = A\}$ et $C(A) = \{g \in G/gag^{-1} = a(a \in A)\}$. Ce sont les *normalisateur* et *centralisateur* de A respectivement. Montrer que $N(A)$ et $C(A)$ sont des sous-groupes de G et que $C(A) \triangleleft N(A)$.

Exercice 21. Soit G un groupe. On appelle *groupe des commutateurs* de G et on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par $\{xyx^{-1}y^{-1}|x \in G, y \in G\}$. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Soit H un sous-groupe distingué de G tel que G/H est abélien. Montrer que H contient $D(G)$. (Autrement dit $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G tel que le quotient de G par ce sous-groupe est abélien.) Soit $f : G \to A$ un morphisme, avec A groupe abélien. Montrer que le noyau de f contient $D(G)$.

Exercice 22. Soit G un groupe. Notons $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe de ses automorphismes. Considérons l'application $G \to \mathrm{Aut}(G)$ qui à g associe la conjugaison par g. Montrer que c'est un morphisme. Déterminer son noyau. Montrer que son image $\mathrm{Int}(G)$ (le groupe des *automorphismes intérieurs* de G) est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$. Le groupe quotient $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ s'appelle le groupe des *automorphismes extérieurs* de G. Déterminer $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Int}(G)$ lorsque G est le groupe des isométries du triangle équilatéral.