

Feuille de TD2–Notions de groupe

Exercice 1. Les ensembles suivants, munis de l'opération indiquée, sont-ils des groupes ? Si oui, sont-ils abéliens ? Si non, préciser si la loi est associative, commutative, si elle admet un élément neutre (et dans ce cas, si chaque élément est inversible).

(a) $(\mathbb{Z}, \times)$,

(b) $(\{+1, -1\}, \times)$ avec $\{+1, -1\} \in \mathbb{Z}$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$,

(d) $(\{+1, -1, +i, -i\} \subset \mathbb{C}, \times)$

(e) $(\mathbb{Q}_{>0}, \times)$, avec $\mathbb{Q}_{>0} = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$,

(f) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$, avec $x * y = xy + x + y$.

Exercice 2. Dans l'ensemble $\mathbb{R}$, on considère deux lois de composition interne, notées $\oplus$ et $*$ et définies par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \oplus y = x + y - 2, \qquad x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Est-ce que ces lois définissent des lois de groupes ? Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport Ã la loi $\oplus$. Résoudre l'équation suivante: $(4 * x)\ \oplus\ 5 = 7$.

Exercice 3. Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Les opérations suivantes munissent-elles $\mathcal{P}(E)$ d'une structure de groupe ? Si oui, sont-elles abéliennes ? Si non, préciser si la loi est associative, commutative, si elle admet un neutre (et dans ce cas, si chaque élément est inversible): a) L'intersection $\cap$; b) La réunion $\cup$; c) La différence symétrique Δ, définie par $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 4. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On définit sur G une nouvelle loi $\star$ à l'aide de la formule $g \star h = h \cdot g$. Montrez que $(G, \star)$ est aussi un groupe, noté G^{op} (la loi de G^{op} est appelée l'*opposée* de la loi de G).

Exercice 5. Soit n un entier et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Démontrer que le produit matriciel définit sur $GL_n(\mathbb{R})$ une structure de groupe. Montrer que ce groupe est abélien si et seulement si $n \in \{0, 1\}$.

Exercice 6. On considère un carré du plan euclidien, de sommets A, B, C, D. Déterminer les isométries du plan laissant le carré invariant. Montrer que c'est un sous-groupe fini du groupe des isométries du plan et dresser sa table de multiplication.

Exercice 7. Soit G un groupe vérifiant $g^2 h^2 = (gh)^2$ pour tous $g, h \in G$. Montrer que G est alors abélien. En déduire que si G est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2, alors G est abélien.

Exercice 8. Soit G un groupe fini d'ordre pair. Montrer qu'il existe un nombre pair ≥ 2 d'éléments $g \in G$ satisfaisant $g = g^{-1}$.

Exercice 9. Montrer que l'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}^*$, ainsi que l'ensemble $\{\frac{1+2m}{1+2n}, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 10. Soient m et n deux entiers. Le sous-ensemble $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbb{Z}$? Plus généralement, montrer que la réunion de deux sous-groupes d'un groupe G est elle-même un sous-groupe de G si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

Exercice 11. Soit H une partie non vide d'un groupe G. On pose $H^{-1} = \{x^{-1}; x \in H\}$. Montrer les équivalences suivantes :

(a) $H < G \Longleftrightarrow HH^{-1} \subset H$; (b) $H < G \Longleftrightarrow \forall a \in H,\ Ha = H$.

Exercice 12. Soit G un groupe. Vérifier que $Z(G)$ est un sous-groupe abélien de G. Montrer que si G possède un unique élément d'ordre 2, alors cet élément est dans le centre $Z(G)$.

Exercice 13. On considère le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Donner la liste des éléments d'ordre 1, 2 et 4. Ce groupe est-il cyclique ? Combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre 4 ? Parmi les sous-groupes d'ordre 4 préciser ceux qui sont cycliques et ceux qui ne le sont pas.

Exercice 14. On se place dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ on note $\bar{k}$ sa classe modulo n.

1. Soit $0 \leq k \leq n-1$. Quel est l'ordre de $\bar{k}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Montrez que n est un nombre premier si et seulement si chaque élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Vérifiez que les seuls générateurs de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont $\bar{1}$ et $\bar{5}$. Décrivez le sous-groupe engendré par $\{2, 3\}$ puis le sous-groupe engendré par $\{4\}$.

Exercice 15. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Exercice 16. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = 1 \right\}$. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe $GL_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que A et B sont d'ordres finis mais que AB est d'ordre infini. On se propose de démontrer que $\{A, B\}$ engendre $SL_2(\mathbb{Z})$.

1. Soit X une matrice de $M_2(\mathbb{Z})$. On note L_1 et L_2 les lignes de X. Montrer que la matrice AX est obtenue à partir de X à l'aide des opérations suivantes: $L_1 \leftarrow -L_2,\ L_2 \leftarrow L_1$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{Z}$ la matrice $(AB)^n X$ est obtenue à partir de X à l'aide des opérations $L_1 \leftarrow L_1 + nL_2, L_2 \leftarrow L_2$ et que la matrice $(BA)^n X$ est obtenue à partir de X à l'aide des opérations $L_1 \leftarrow L_1,\ L_2 \leftarrow L_2 - nL_1$.

   Dans toute la suite on fixe $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

2. On suppose ici que $a = 0$ ou $c = 0$. Montrer qu'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $A^p X = (AB)^q$. Conclure.

3. On suppose que $ac \neq 0$. Montrer que a et c sont premiers entre eux. En utilisant l'algorithme de la division euclidienne de recherche du pgcd de a et c, montrer qu'il existe $M \in \{A, B\}$ tel que $MX \in \{A, B\}$. Conclure.

Exercice 17. On considère dans $GL_2(\mathbb{C})$ les matrices

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit Q_8 le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ engendré par $\{i, j\}$. Montrer que $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, et donner sa table de multiplication. Déterminer tous les sous-groupes de Q_8, et ordonner-les (partiellement) par inclusion.

Exercice 18. Soit G un groupe et soient a et b des éléments de G d'ordres respectifs m et n tels que $ab = ba$ et $\operatorname{pgcd}(m; n) = 1$. Montrer que l'ordre de ab est mn. Trouver des contre-exemples lorsque l'on ne suppose pas $ab = ba$ ou $\operatorname{pgcd}(m; n) = 1$.