Licence 3 Algèbre — Université Paris Diderot
2015-2016

**Feuille de TD1–Ensembles-Relations**

**Exercice 1.** –Soit $f : E \to F$ une application. On rappelle que l'*image directe* d'un sous-ensemble $A$ de $E$ par $f$ est noté $f(A)$ et est l'ensemble des éléments de $F$ qui s'écrivent $f(x)$ pour $x \in A$; autrement dit : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. On rappelle que l'*image réciproque* d'un sous-ensemble $B$ de $F$ par $f$ est noté $f^{-1}(B)$ et est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ tels que $f(x) \in B$; autrement dit: $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

Montrer les affirmations suivantes :

- $\forall B \in \mathcal{P}(F)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Si $f$ est surjective, alors $B \subset f(f^{-1}(B))$.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Quand a-t-on égalité?

**Exercice 2.** – Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Compléter et démontrer les assertions suivantes :

(i) si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est ...... ;
(ii) si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est ..... ;
(iii) si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective ;
(iv) si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective ;
(v) si $g \circ f$ est bijective alors $f$ et $g$ sont .....

**Exercice 3.** Pour tout réel $x \geq 0$, $[x]$ désigne la partie entière de $x$.

On considère deux applications $f$ et $g$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies de la façon suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = n + 1, \quad g(n) = \left[\frac{n}{2}\right].$$

a) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$ et l'ensemble $g^{-1}(\{1\})$.
b) Pour chacune des deux fonctions $f$ et $g$, indiquer si elle est injective ou non.
c) Pour chacune des deux fonctions $f$ et $g$, indiquer si elle est surjective ou non.

**Exercice 4.** On considère les trois intervalles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$I_1 = [1, +\infty[, I_2 = [-8, 11],\ I_3 = [-1, 2],$$

ainsi que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $A = I_1 \times \mathbb{R}$ et $B = I_2 \times I_3$.

1) Décrivez $A \cap B$, $B \setminus A$, $\mathbb{R}^2 \setminus B$.
2) On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3 - x, y)$. Montrez que $f(B) \subset B$.
3) A-t-on $f(B) = B$? (Justifiez).

**Exercice 5.** –Soit $E$ un ensemble et $A$ un sous-ensemble de $E$. On appelle *fonction caractéristique* de $A$, l'application $f_A : E \to \{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer les assertions suivantes :

1- $A = B \Rightarrow f_A = f_B$

2- $f_{A\cap B} = f_A f_B$

3- $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$

**Exercice 6.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On définit les notions suivantes :
$E$ est *moins puissant* que $F$ s' il existe une injection $f : E \to F$,
$E$ est *plus puissant* que $F$ s'il existe une surjection $f : E \to F$,
$E$ et $F$ sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \to F$.

1) Si $E \neq \emptyset$, montrer que $E$ est moins puissant que $F$ si et seulement si $F$ est plus puissant que $E$.
2) Prouver que les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\{n \in \mathbb{N}, 3|n\}$ et $\mathbb{Z}$ sont équipotents deux à deux.
3) Montrer que $E$ est moins puissant que $P(E)$, l'ensemble des parties de $E$.
4) Dans cette question, on montre que $E$ est $P(E)$ ne sont jamais équipotents.
   a) Soit $f : E \to P(E)$ une application quelconque, on pose alors $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Démontrer que $A \notin f(E)$.
   b) Conclure.

**Exercice 7.** Parmi les relations suivantes sur un ensemble $E$, lesquelles sont des relations d'équivalence, lesquelles ne le sont pas?

1) La relation $x\mathcal{R}y \iff x = -y$ sur $\mathbb{N}$
2) La relation $x\mathcal{R}y \iff \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$.
3) La relation d'égalité " est égal à " sur un ensemble $E$.
4) La relation " est perpendiculaire à " sur l'ensemble des droites d'un plan.
5) La relation " est parallèle à " sur l'ensemble des droites d'un plan.
6) La relation " $x$ et $y$ ont des parties entières égales " sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
7) Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Le graphe $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$ défini-t-il une relation d'équivalence sur $E$?
8) Pour E l'ensemble des suites de nombres rationnels, $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, u_n \in \mathbb{Q}\}$, la relation sur $E$ définie par : $u \mathcal{R} v \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
9) Soit $X$ un ensemble non vide et soit $E$ l'ensemble des parties de $X$. Pour $A$ et $B$ deux parties de $X$ on définit la relation: $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (A = B \text{ ou } A = X \setminus B)$.
10) La relation sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x).$$

**Exercice 8.** Soit $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on considère la relation sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ définie par :
$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
   On note $\mathcal{C}_{(x,y)}$ la classe d'équivalence associée à l'élément $(x, y)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2) Parmi les éléments suivants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, lesquels sont en relation ?
$$(2, 4),\ (-1, 3),\ (6, 12),\ (-1/2, -1) \text{ et } (1, -3).$$
3) Soit $b \in \mathbb{R}^*$, déterminer $\mathcal{C}_{(0,b)}$.
4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, montrer que $\mathcal{C}_{(\frac{a}{b},1)} = \mathcal{C}_{(a,b)}$.
5) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $m' \in \mathbb{R}$, montrer que si $\mathcal{C}_{(m,1)} = \mathcal{C}_{(m',1)}$ alors $m = m'$.
6) Montrer que l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$
   induit une bijection
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*/\mathcal{R} \to \mathbb{R}$$
7) Exprimer la bijection réciproque de $\tilde{f}$ et en déduire un système de représentants des classes modulo $\mathcal{R}$.

**Exercice 9.** –Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^3 + 3x^2$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie dans $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. Discuter suivant $x \in \mathbb{R}$, le cardinal de la classe de $x$ modulo $\mathcal{R}$. En déduire une partition de $\mathbb{R}$ en classes d'équivalence. Donner un système de représentants.

**Exercice 10.** –On se donne un ensemble $E$ et un sous-ensemble $A \subset E$. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de $E$ par $X\mathcal{R}Y \Rightarrow X \cap A = Y \cap A$ est une relation d'équivalence. Montrer que $\mathcal{P}(A)$ en est un système de représentants.

**Exercice 11.** – Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels par $P\mathcal{R}Q \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}^\star,\ P = \lambda Q$ est une relation d'équivalence. Trouver un système de représentants.

Montrer que $\mathcal{R}$ induit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré au plus 1. En trouver un système de représentants et montrer qu'il est en bijection avec $\mathbb{R}$.

**Exercice 12.** Dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $(a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$.

1) Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. et qu'elle est compatible avec l'addition de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2) Montrer que $\{(n, 0),\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, n),\ n \in \mathbb{N}^\star\}$ est un système de représentants pour la relation $\mathcal{R}$. On note généralement $n$ la classe du couple $(n, 0)$ et $-n$ celle du couple $(0, n)$ et $\mathbb{Z}$ le quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.

**Exercice 13.** Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on définit une relation d'équivalence par

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ z \sim z' \iff |z| = |z'|.$$

Représentant un nombre complexe par un point du plan de Gauss, dessiner la classe d'équivalence du nombre complexe $1 + i$, puis d'un nombre complexe quelconque. Visualiser la partition de $\mathbb{C}$ associée à cette équivalence. Déterminer de la façon la plus agréable possible un système de représentants pour cette relation d'équivalence. Etablir une bijection $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}/\sim$.

**Exercice 14.** Soient deux relations d'équivalence : $\mathcal{R}$ sur $E$, et $\mathcal{S}$ sur $F$. On définit sur $E \times F$ la relation :

$$(x, y) \sim (x'y') \iff x\mathcal{R}x' \text{ et } y\mathcal{S}y'.$$

1) Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2) Soit $\varphi : E \times F \to E/\mathcal{R} \times F/\mathcal{S}$ l'application qui à $(x, y)$ associe $([x]_\mathcal{R}, [y]_\mathcal{S})$. Démontrer que $\varphi$ est compatible avec $\sim$ et que l'application quotient associée est une bijection.

**Exercice 15.** On désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ qui à $t$ associe $\exp(it)$.

1) Montrer que la restriction de $g$ à $[0, 2\pi[$ est bijective.
2) On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $t \sim t' \Leftrightarrow g(t) = g(t')$. Quelle est la classe d'équivalence de $\pi$? Quelle est la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$?
3) Montrer que l'application $g$ passe au quotient modulo $\sim$.
4) En déduire que $\mathbb{R}/\sim$ est en bijection avec $[0, 2\pi[$.