Université de Paris
Master de Mathématiques

Théorie algébrique des nombres II
Année 2020-21
H. Chen, P. Molin, L. Merel

EXAMEN du 6 janvier 2021 – Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

Notations et rappels

Soit K un corps de nombres. Notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. L'inverse de l'idéal fractionnaire $\{x \in K/\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(xy) \in \mathbf{Z}, y \in \mathcal{O}_K\}$ est un idéal entier appelé *différente* de K et noté $\mathcal{D}_K$. Notons $\mathcal{C}\ell_K$ le groupe des classes de K. Notons $C_K = \mathbf{A}_K^\times/K^\times$ le groupe des classes d'idèles de K. Pour I idéal de $\mathcal{O}_K$, on pose $|I| = |\mathcal{O}_K/I|$. Ainsi, $|\mathcal{D}_K|$ est le discriminant de K. On note S_K (resp. S_f, resp. S_∞) l'ensemble des places (resp. places finies, resp. places infinies) de K.

Pour $v \in S_K$, on note K_v le complété de K en v et $|.|_v$ la valeur absolue associée. Si v est finie, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v, $\mathcal{P}_v$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ associé à v, $\pi_v \in \mathcal{O}_v$ une uniformisante de $\mathcal{P}_v\mathcal{O}_v$, q_v le cardinal du corps résiduel (si bien que $|x|_v = q_v^{-v(x)}$ où $x \in K_v$ a pour valuation $v(x)$), n_v la valuation de la différente $\mathcal{D}_v$ de K_v. Pour χ caractère de Hecke unitaire de C_K, soit $\chi_v : K_v^\times \to \mathbf{C}^\times$ la composante locale de χ.

Posons $L_v(\chi_v, s) = 1$ si $v \in S_f$ et χ_v est ramifiée.

Posons $L_v(\chi_v, s) = 1/(1 - \chi_v(\pi_v)q_v^{-s})$ si $v \in S_f$ et χ_v est non-ramifiée.

Posons $L_v(\chi_v, s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ si $K_v = \mathbf{R}$ et $\chi_v = 1$.

Posons $L_v(\chi_v, s) = \pi^{-(s+1)/2}\Gamma((s+1)/2)$ si $K_v = \mathbf{R}$ et $\chi_v \neq 1$.

Posons $L_v(\chi_v, s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ si $K_v = \mathbf{C}$.

On pose $\Lambda(\chi, s) = \prod_{v \in S_K} L_v(\chi_v, s)$. Ce produit converge pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand et admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ en la variable complexe s. On a $\Lambda(\chi, s) = \epsilon(\chi, s)\Lambda(\bar{\chi}, 1-s)$. On note 1_K le caractère trivial de C_K et $\Lambda_K(s) = \Lambda(1_K, s)$ (complétée de la fonction ζ de Dedekind de K).

On a $\epsilon(\chi, s) = \prod_{v \in S_K} \epsilon(\chi_v, s)$. Précisons le facteur $\epsilon(\chi_v, s)$. Pour $v \in S_f$, soit η_v une mesure de Haar sur K_v telle que $\eta_v(\mathcal{O}_v)\eta_v(\mathcal{D}_v) = 1$.

Si $v \in S_f$ et χ_v non ramifiée, on a $\epsilon(\chi_v, s) = \eta_v(\mathcal{O}_v)/(\chi_v(\pi_v^{n_v})q_v^{n_v(1-s)})$.

Si $K_v = \mathbf{R}$ et $\chi_v = 1$ (resp. $\chi_v \neq 1$), on obtient $\epsilon(\chi_v, s) = 1$ (resp. $= -i$).

Si $K_v = \mathbf{C}$, et $\chi_v(z) = (|z|/z)^a$, avec $a \in \mathbf{Z}$, on obtient $\epsilon(\chi_v, s) = (-i)^a$.

Le *groupe des classes restreint* $\mathcal{C}\ell_K^+$ de K est le groupe des idéaux fractionnaires de K quotienté par le sous-groupe formé des idéaux de la forme $a\mathcal{O}_K$, avec $a \in K^\times$ totalement positif (*i.e.* tout plongement de K dans $\mathbf{R}$ envoie a sur un nombre > 0). Le morphisme de groupes surjectif $C_K \to \mathcal{C}\ell_K^+$ se déduit du morphisme $\mathbf{A}_K^\times \to \mathcal{C}\ell_K^+$, qui à l'idèle $(x_v)_{v \in S_K}$ associe la classe de $\prod_{v \in S_f} \mathcal{P}_v^{v(x_v)-v(y)}$ où $y \in K^\times$ est tel que l'image de y dans la composante en v de $\mathbf{A}_K^\times$ a même signe que x_v, pour toute place réelle v.

Le *corps de classe de Hilbert* H de K est la plus grande extension abélienne partout non ramifiée de K et telle que toute place réelle de K ne se prolonge pas en une place non réelle de H. On a un isomorphisme de groupes $\mathrm{Gal}(H/K) \simeq \mathcal{C}\ell_K$ qui associe à la substitution de Frobenius en v la classe de $\mathcal{P}_v$ dans $\mathcal{C}\ell_K$.

I

1. Soit I un idéal de $\mathcal{O}_K$. Montrer que la classe de I dans $\mathcal{C}\ell_K$ est un carré si et seulement si pour tout caractère quadratique $\tilde{\chi}$ de $\mathcal{C}\ell_K$ on a $\tilde{\chi}(I) = 1$.
2. Montrer que dans le noyau du morphisme canonique $\mathcal{C}\ell_K^+ \to \mathcal{C}\ell_K$ tout élément au carré est trivial.
3. Soit $\tilde{\chi}$ un caractère de $\mathcal{C}\ell_K^+$. Notons χ le caractère de Hecke unitaire associé. En quelles places finies v, la composante locale χ_v est-elle ramifiée ?
4. Si v est une place finie, montrer qu'on a $\chi_v(\pi_v) = \tilde{\chi}(\mathcal{P}_v)$.
5. Montrer que, si $K_v = \mathbf{C}$, on a $\chi_v = 1$, et que, si $K_v = \mathbf{R}$, on a $\chi_v = 1$ ou la fonction signe. Montrer que si $\tilde{\chi}$ se factorise par $\mathcal{C}\ell_K^+ \to \mathcal{C}\ell_K$, on a $\chi_v = 1$ lorsque $K_v = \mathbf{R}$.
6. Montrer que pour v place finie de K, on a $\eta_v(\mathcal{O}_v) = q_v^{n_v/2}$.
7. Montrer que $\epsilon(\chi, s) = (-i)^t \overline{\tilde{\chi}(\mathcal{D}_K)}/|\mathcal{D}_K|^{1/2-s}$, en explicitant t.

II

Considérons le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$. On rappelle que son anneau d'entiers est $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ et que son nombre de classes est 1.
1. Montrer que sa différente est l'idéal engendré par $2\sqrt{3}$.
2. Quel est le discriminant de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$?
3. Montrer que la différente de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ n'est pas un carré dans $\mathcal{C}\ell^+_{\mathbf{Q}(\sqrt{3})}$.
4. Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{3})|\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ est quadratique et contient $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.
5. Montrer que l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{3})|\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ est partout non ramifiée.
6. Le corps de classe de Hilbert de $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ contient-il $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{3})$?
7. Soit $\tilde{\chi}$ un caractère non trivial de $\mathcal{C}\ell^+_{\mathbf{Q}(\sqrt{3})}$. Notons χ le caractère de $C_{\mathbf{Q}(\sqrt{3})}$ associé. Calculer $\epsilon(\chi, s)$.

III

Fixons un caractère quadratique $\tilde{\chi}$ de $\mathcal{C}\ell_K$. Notons χ le caractère de Hecke associé.
1. Montrer qu'il existe une extension quadratique $E|K$ partout non ramifiée, réelle au dessus de toutes les places réelles de K et telle que, pour toute place finie v, la substitution de Frobenius en v soit triviale dans $\mathrm{Gal}(E/K)$ si et seulement si $\tilde{\chi}(\mathcal{P}_v) = 1$.
2. Quelle est la densité de Dirichlet de l'ensemble d'idéaux premiers $\mathcal{P}_v$ de $\mathcal{O}_K$ tels que $\chi_v(\pi_v) = 1$?
3. Pour v place finie de K, montrer la formule $\prod_{w|v}(1-q_v^{-f_w s}) = (1-q_v^{-s})(1-\chi_v(\pi_v)q_v^{-s})$, où w parcourt les places de E au-dessus de v et f_w est le degré résiduel de $E_w|K_v$.
4. En déduire qu'on a $\Lambda_E(s) = \Lambda_K(s)\Lambda(\chi, s)$.
5. Montrer que $\epsilon(1_E, s) = \epsilon(1_K, s)\epsilon(\chi, s)$.
6. En déduire que $|\mathcal{D}_E| = |\mathcal{D}_K|^2$.
7. *Coronidis loco* : en déduire que $\mathcal{D}_K$ est un carré dans $\mathcal{C}\ell_K$.