Université Denis Diderot
U.F.R. de Mathématiques

25 novembre 2003

M. Fouquet, L. Merel

Licence de Mathématiques et d'Informatique : Algèbre et Géométrie

TEST N^o 3

NOM :

Prénom :

1) Soit R un anneau commutatif. On suppose que pour tout $a \in R$, $a^n = a$. Montrer que tout idéal premier de R est un idéal maximal.
2) Soit $f(X) = X^5 + X^4 - 2X^3 + 3X - 3$ un élément de $\mathbf{Z}[X]$. Montrer que $\mathbf{Z}[X]/(f(X))$ n'est pas intègre.
3) Le polynôme $X^4 + 25X^3 + 5$ est-il irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$?
4) Quel doit être le degré d'un polynôme irréductible $f(X)$ pour que $\mathbf{F}_2[X]/(f(X))$ soit un corps à 64 éléments?
5) Les polynômes $X^7 + 3X^5 + X^3 + 3X$ et $2X^4 + 4X^2 + 2$ sont-ils premiers entre eux dans $\mathbf{F}_5[X]$?
6) Résoudre le système de congruences suivant :

$$x \equiv 1 \bmod 5$$
$$x \equiv 2 \bmod 8$$
$$x \equiv 3 \bmod 9$$

7) Le sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est-il distingué dans le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$?

Répondre ci-dessous et au verso en justifiant aussi brièvement que possible.