

**Licence de Mathématiques et d'Informatique : Algèbre et Géométrie**

**TEST N° 3**

NOM :

Prénom :

- 1) On pose  $f(X) = X^2 + 1$ . Montrer que  $X + 1$  est un élément nilpotent de  $\mathbf{F}_2[X]/(f(X))$ .
- 2) Quel doit être le degré d'un polynôme irréductible  $f(X)$  pour que  $\mathbf{F}_7[X]/(f(X))$  soit un corps de 2401 éléments?
- 3)  $X^4 + X^3 + 1$  est-il irréductible dans  $\mathbf{F}_2[X]$ ?
- 4) Les polynômes  $X^6 + 3X^4 + X^2 + 3X$  et  $X^3 + 3X + 4$  sont-ils premiers entre eux dans  $\mathbf{F}_5[X]$ ?
- 5) Donner la définition d'un corps algébriquement clos.
- 6) Soit  $A$  l'anneau des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbf{R}$ . Soit  $a \in [0, 1]$ . On pose  $M_a = \{f \in A \mid f(a) = 0\}$ . Montrer que  $M_a$  est un idéal maximal de  $A$ .

Répondre ci-dessous et au verso en justifiant aussi brièvement que possible.