Université Denis Diderot
U.F.R. de Mathématiques

12 octobre 2004

M. Fouquet, L. Merel

Licence de Mathématiques et d'Informatique : Algèbre et Géométrie

TEST N^o 1

NOM :

Prénom :

1) Soient G et H deux groupes et soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes. La proposition suivante est-elle vraie : si G est abélien alors H l'est aussi? Si oui démontrer le résultat, autrement donner un contre-exemple.
2) Montrez que si A et B sont des sous-ensembles de G tels que $A \subseteq B$ alors $C_G(B)$ est un sous-groupe de $C_G(A)$. (On rappelle que pour I sous-ensemble de G, $C_G(I)$ est l'ensemble $\{g \in G \mid \forall i \in I,\ gig^{-1} = i\}$.)
3) Soient A et B deux groupes. Montrer que $\{(a, 1) \mid a \in A\}$ est un sous-groupe distingué de $A \times B$.
4) Soit H un groupe et soit $h \in H$. Donner un homomorphisme de groupes de $\mathbf{Z}$ dans H dont l'image est le sous-groupe engendré par h.
5) Soit $n = 6$. Le groupe diédral D_{2n} admet-il un sous-groupe d'ordre 5?
6) Soit $\theta : \mathbf{C}^* \to \mathbf{R}^*$ l'application définie par $\theta(a + bi) = a^2 + b^2$ avec $a,\ b \in \mathbf{R}$. Montrer que θ est un homomorphisme de groupes et déterminer géométriquement le noyau de θ en identifiant les éléments de $\mathbf{C}^*$ aux points du plan.

Répondre ci-dessous et au verso en justifiant aussi brièvement que possible.