Université Paris 7 – Denis Diderot
M2 Mathématiques fondamentales

Année 2008-09
Introduction aux formes automorphes

Feuille de révisions III

Notons $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$.

1. Soit A un anneau topologique (*i.e.* $(A,+)$ est un groupe topologique et la multiplication est continue). Montrer que si on munit A^* de la topologie induite par A, le passage à l'inverse n'est pas une application continue en général. Qu'en est-il pour $A = \mathbf{A}$?

2. On munit $\mathbf{A}^2$ de la topologie produit. Montrer que l'application $f : \mathbf{A}^* \to \mathbf{A}^2$ qui à x associe (x, x^{-1}) définit un homéomorphisme entre $\mathbf{A}^*$ et l'image de f.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs dans $\hat{\mathbf{Z}}$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n n\,!$ converge dans $\hat{\mathbf{Z}}$. Montrer que tout élément de $\hat{\mathbf{Z}}$ s'écrit sous la forme d'une telle série de façon unique si on impose $0 \leq u_n \leq n$ pour tout n. Écrire ainsi -1.

4. Rappeler pourquoi $\mathbf{A}^*/\mathbf{Q}^*$ n'est pas compact. En déduire que le centre $Z(\mathbf{A})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ n'est pas un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$.

5. Rappelons qu'on a $\mathbf{A} = \mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{R}$. En déduire que pour toute place v de $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{A}$, puis le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ engendré par les matrices unipotentes supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ et les matrices unipotentes supérieures de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_v)$ est dense dans le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ formé par les matrices unipotentes supérieures.

6. Soit v une place de $\mathbf{Q}$. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_v)$ est engendré par les matrices unipotentes supérieures et inférieures. En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}).\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_v)$ est dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A})$, puis que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}).D.\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_v)$ est dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{A})$, où $D = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbf{A}^*\}$.

7. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ (il suffit de montrer pour cela que l'intersection de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ avec tout compact est finie).

8. Montrer que l'espace quotient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ n'est pas compact.

9. Notons $Z(\mathbf{A})$ le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$. Montrer que l'espace quotient $(Z(\mathbf{A}).\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}))\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbf{A})$ n'est pas compact.