Université Paris 7 – Denis Diderot
M2 Mathématiques fondamentales

Année 2008-09
Introduction aux formes automorphes

Feuille de révisions II

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$.

2. Montrer que $\mathbf{Q}_p$ n'est pas compact. Montrer que $\mathbf{Q}_p$ est totalement discontinu (*i.e.* tout point admet une base de voisinages ouverts et fermés.)

3. Rappeler comment on construit un homomorphisme injectif de groupes $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Un tel homomorphisme est-il unique ?

4. Montrer que $\mathbf{Z}_p^*$ admet $p-1$ racines $(p-1)$-ème de l'unité.

5. Montrer que tout élément de $\mathbf{Q}_p$ s'écrit de façon unique $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n p^n$ avec $a_n = 0$ pour n assez petit et $a_n = 0$ ou a_n racine $(p-1)$ème de l'unité sinon.

6. Soit A un anneau topologique (*i.e.* $(A,+)$ est un groupe topologique et la multiplication est continue). Montrer que si on munit A^* de la topologie induite par A, le passage à l'inverse n'est pas une application continue en général. Qu'en est-il pour $A = \mathbf{Z}_p$?

7. Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathbf{Q}_p^*$ est contenu dans $\mathbf{Z}_p^*$.

8. On pose $\mathbf{Q}_p^{*2} = \{x^2/x \in \mathbf{Q}_p^*\}$. Montrer que le groupe $\mathbf{Q}_p^*/\mathbf{Q}_p^{*2}$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$ (resp. $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$) si $p \neq 2$ (resp. si $p = 2$). En déduire combien il y a de caractères $\mathbf{Q}_p^* \to \{-1,1\}$.

9. Notons B (sous-groupe de Borel) le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ formé par les matrices triangulaires supérieures. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) = B.\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (décomposition d'Iwasawa).

10. Posons $I = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)/p|c\}$ (sous-groupe d'Iwahori). Montrer que c'est un sous-groupe compact, ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Quel est son indice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$?

11. Montrer que tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui contient $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est égal à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ (sous-groupe compact maximal).

12. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est engendré par les matrices unipotentes inférieures et supérieures.