Université Paris 7-Denis Diderot Algèbre – Année 2007-08
M1 mathématiques

Révisions II

Considérons les nombres réels positifs suivants : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ et $\sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$. Considérons la racine cubique primitive de l'unité j dans $\mathbf{C}$. Posons

$$t = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}}, s = \sqrt[3]{2-\sqrt{2}}$$

et

$$x = s + t = \sqrt[3]{2+\sqrt{2}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{2}}.$$

1. Placer dans un diagramme les corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(j)$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, j)$. Indiquer les degrés des extensions. Dire quelles extensions sont galoisiennes, résolubles par radicaux.
2. Montrer que t a pour polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ le polynôme $Q(T) = T^6 - 4T^3 + 2 \in \mathbf{Q}[T]$. Déterminer les conjugués de t. Montrer que le corps de décomposition de Q dans $\mathbf{C}$ est $\mathbf{Q}(j, t, s)$.
3. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(t)|\mathbf{Q}$? Cette extension est-elle galoisienne ? Contient-elle $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(j)$?
4. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(j, t)|\mathbf{Q}$?
5. Montrer qu'elle est galoisienne si et seulement si $s \in \mathbf{Q}(j, t)$. Montrer que $\mathbf{Q}(j, t, s) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, j, t)$. En déduire que $\mathbf{Q}(j, t)|\mathbf{Q}$ est galoisienne si et seulement si $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q}(j, t)$.
6. Montrer que x vérifie $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x - 4 = 0$. En déduire que $\mathbf{Q}(x)$ contient $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ et que x est annulé par un polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ de degré 9. Déterminer les conjugués de x dans $\mathbf{C}$. Montrer que tous ces conjugués sont dans $\mathbf{Q}(j, t, s)$.
7. Montrer que $\mathbf{Q}(x)|\mathbf{Q}$ est de degré 3 ou 9, et que $[\mathbf{Q}(x) : \mathbf{Q}] = 3$ si et seulement si $x \in \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$.
8. Posons $y = \sqrt[3]{2}\, x$. Montrer que $\mathbf{Q}(y) \in \mathbf{Q}(x)$. Montrer que le polynôme $Y^3 - 6Y - 8$ est minimal pour y sur $\mathbf{Q}$.
9. Montrer que $x \in \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ si et seulement si $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbf{Q}(y)$. Calculer les discriminants des polynômes $X^3 - 2$ et $Y^3 - 6Y - 8$.
10. Montrer que les clôtures normales de $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ et $\mathbf{Q}(y)$ contiennent des corps quadratiques distincts (ces clôtures normales sont les corps de décomposition de $X^3 - 2$ et $Y^3 - 6Y - 8$ respectivement dans $\mathbf{C}$). En déduire que $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) \neq \mathbf{Q}(y)$.
11. En déduire que le polynôme $(X^3 - 4)^3 - 54X^3$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{Q}(j, t, s)|\mathbf{Q}$?
12. Quel est l'ordre du groupe de Galois du polynôme Q ?