Feuille de révisions I

Soit N un entier ≥ 1. On pose

$$\Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/N|c, N|(d-1)\}$$

et

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})/N|c\}.$$

Posons $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbf{C}/\mathrm{Im}(\tau) > 0\}$. Pour $\tau \in \mathcal{H}$, posons $q = e^{2i\pi\tau}$ et

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n).$$

On note $S_2(N)$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_1(N)$. Pour $f \in S_2(N)$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})^+$, on pose

$$f_{|\gamma}(\tau) = \frac{(ad-bc)}{(c\tau+d)^2} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}).$$

1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}$ normalise $\Gamma_1(N)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$. On note W_N l'involution de $S_2(N)$ qui s'en déduit.
2. Soit $f \in S_2(N)$. Soit $\tau_0 \in \mathcal{H}$. Montrer que l'application $\Gamma_1(N) \to \mathbf{C}$ qui à γ associe $\int_{\tau_0}^{\gamma\tau_0} f(\tau)\, d\tau$ est un homomorphisme de groupes indépendant de τ_0. Montrer que son noyau contient les éléments paraboliques (*i.e.* qui stabilisent un élément de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$) et elliptiques (*i.e.* qui stabilisent un élément de $\mathcal{H}$) de $\Gamma_1(N)$, ainsi que les commutateurs de $\Gamma_1(N)$.
3. Pour $\tau \in \mathcal{H}$, posons $f_{11}(\tau) = (\eta(\tau)\eta(11\tau))^2$. On pourra admettre ou démontrer (à l'aide des formules de transformation de la fonction η) que f_{11} appartient à $S_2(11)$ et est modulaire pour $\Gamma_0(11)$.
4. Quelle est la partie ancienne de $S_2(11)$?
5. Admettons que l'espace $S_2(11)$ est de dimension 1. Montrer que f_{11} est une forme primitive.
6. Montrer qu'on a $(T_{11} + W_{11})g = \sum_{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} (W_{11}g)_{|g}$ ($g \in S_2(N)$, modulaire pour $\Gamma_0(11)$). En déduire que $(T_{11} + W_{11})g$ est modulaire pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, puis que $T_{11}g = -W_{11}g$.
7. Calculer le 11-ème coefficient du q-développement de f. En déduire que $W_{11}(f_{11}) = f_{11}$.
8. Posons $f_{11}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Posons $L(f_{11}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ et $\Lambda(f_{11}, s) = 11^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f_{11}, s)$. Montrer que cette fonction de la variable complexe s admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ et que $\Lambda(f_{11}, s) = -\Lambda(f_{11}, 2-s)$.
9. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \to (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe la classe de (c, d) modulo N est surjective. Montrer que cela fait de $\mathbf{C}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2]$ un $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-module à droite. On note l'action de $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ par $.g$. On pose

$$F(\tau) = \sum_{g \in \Gamma_1(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})} f_{|g}(\tau)[0,1).g] \in \mathbf{C}[(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^2].$$

Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, on pose

$$F_{|\gamma}(\tau) = \frac{(ad-bc)}{(c\tau+d)^2} F(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}).\gamma.$$

Montrer que $F_{|\gamma} = F$ ($\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$).