Université Paris 7-Denis Diderot MT-282
D.E.U.G.- S.M. Année 1999-00

EXAMEN du 8 septembre 2000

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Quel est l'ordre maximal d'un élément de $\mathbf{Z}/2000\mathbf{Z}$ (muni de l'addition) ? Exhiber un tel élément.
2. Mêmes questions pour $(\mathbf{Z}/2000\mathbf{Z})^*$ (muni de la multiplication, on pourra déterminer l'ordre de 2 modulo 2000).

Exercice 2

Soient A un anneau commutatif et p un nombre premier. Lorsque n est un entier > 0 et $a \in A$, on note $na = a + a + ... + a$ (n termes dans la somme). Notons 0_A et 1_A les éléments neutres de A pour l'addition et la multiplication respectivement. On suppose que $p1_A = 0_A$.
1. Démontrer que pour tout $a \in A$, on a $pa = 0_A$.
2. Démontrer que l'application $x \mapsto x^p$ est un homomorphisme d'anneaux de A dans lui-même. (On rappelle que p divise le coefficient binomial C_p^k lorsque k est un entier vérifiant $1 \leq k \leq p-1$.) Démontrer que l'ensemble des éléments x de A tels que $x^p = x$ est un sous-anneau de A.
3. Établir qu'il existe un homomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to A$ qui à la classe de l'entier n modulo p associe $n1_A$. Cet homomorphisme est-il injectif ? En déduire que A^* possède un sous-groupe d'ordre $p-1$.
4. Supposons que A ne possède qu'un nombre fini d'éléments. Démontrer que A^* est d'ordre divisible par $p-1$.

5. Rappelons que A est un corps si et seulement si $A^* = A - \{0_A\}$. Donner un exemple d'anneau A comme ci-dessus qui soit un corps, puis un exemple d'anneau A qui ne soit pas un corps.
6. Supposons désormais que $p = 2$ et que $A = \{0_A, 1_A, x, y\}$ est un corps composé de quatre éléments. Écrire la table de multiplication et la table d'addition de A.
7. L'application $x \mapsto x^2$ est-elle alors un isomorphisme d'anneaux ? Le groupe A^* est-il alors cyclique ?

Exercice 3

Pour n entier > 0, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs > 0 de n.
1. Calculer $\sigma(n)$ pour $1 \leq n \leq 10$.
2. Soit p un nombre premier et k un entier ≥ 0. Démontrer qu'on a

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

3. Soient n et m deux entiers ≥ 1 premiers entre eux. Notons $D(n)$, $D(m)$ et $D(mn)$ les ensembles des diviseurs > 0 de n, m et nm respectivement. Démontrer qu'on a une bijection $D(n) \times D(m) \to D(nm)$ qui à (c, d) associe cd. En déduire qu'on a $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.
4. Calculer $\sigma(2000)$.