Université Paris 7-Denis Diderot — MT-282

D.E.U.G.- S.M. — Année 1999-00

Devoir à la maison

À rendre en travaux dirigés avant le 5 novembre 1999

Pour $x \in \mathbf{Q}$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier $\leq x$.

1. Soient p un nombre premier et q un nombre rationnel non nul. Démontrer qu'il existe un unique $e \in \mathbf{Z}$ tel que $q = \frac{u}{v}p^e$ avec u et v entiers premiers à p. On pose alors $v_p(q) = e$.

2. Démontrer que $A_p = \{p^n / n \in \mathbf{Z}\}$ muni de la multiplication est un groupe.

3. Démontrer que v_p est un homomorphisme de groupes entre $\mathbf{Q}^*$ muni de la multiplication et $\mathbf{Z}$ muni de l'addition. En déduire un isomorphisme de groupes $A_p \to \mathbf{Z}$. Établir l'inégalité, pour $(x, y) \in \mathbf{Q}^{*2}$,

$$v_p(x + y) \geq \min(v_p(x), v_p(y)).$$

4. Démontrer qu'un nombre rationnel x non nul est entier si et seulement si on a $v_p(x) \geq 0$ pour tout nombre premier p.

5. Soit n un entier > 0. Considérons l'écriture $[a_k a_{k-1} ... a_0]_p$ de n en base p. Démontrer qu'on a, pour tout i tel que $0 \leq i \leq k$

$$[n/p^i] = a_k p^{k-i} + a_{k-1} p^{k-i-1} + ... + a_i.$$

6. Démontrer qu'on a

$$v_p(n\,!) = [n/p] + [n/p^2] + ... + [n/p^k].$$

Posons $s_p(n) = a_0 + a_1 + ... + a_k$. En déduire l'identité

$$v_p(n\,!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.$$

7. Soient n et m deux entiers > 0. Établir la formule

$$v_p(C_{n+m}^n) = \frac{s_p(n) + s_p(m) - s_p(n+m)}{p - 1}.$$

(On rappelle que le coefficient binomial est donné par la formule $C_{n+m}^{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$.) En déduire que tout coefficient binomial est entier.
8. Calculer $v_2(C_{22}^{7})$.