

EXAMEN du 14 septembre 1999

Durée : 3 h

Exercice 1

La Lune a quitté son orbite le 13 septembre 1999 (Science-fiction !). Elle amorce une révolution autour de la galaxie de période 32552 ans et un mois. Le Soleil, et avec lui le reste du système solaire, accomplit une révolution en 240 million d'années.

1. À quelle date aura lieu le premier retour de la Lune à sa position initiale par rapport au Soleil ?
2. La Lune sera-t-elle alors dans la même position par rapport à la Terre ?

(On rappelle que la Terre tourne autour du soleil en un an, c'est-à-dire 12 mois. On présume, de façon non réaliste, que les révolutions ne sont pas perturbées par d'autres corps célestes).

Exercice 2

On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler, c'est-à-dire la fonction qui à n associe le nombre d'élément de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.

1. Rappeler quelle est la formule de $\phi(n)$ lorsque la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier naturel n est de la forme $\prod_p p^{e_p}$.
2. Démontrer que $\phi(n)$ est pair, dès lors que $n > 2$.
3. Soient $m > 0$ et $k \geq 0$ deux entiers tels que $\phi(2^k m) = 20$ et m impair. Démontrer que $k = 0, 1$ ou 2 .
4. Trouver tous les entiers n tels que $\phi(n) = 20$.
5. Les groupes $(\mathbf{Z}/25\mathbf{Z})^*$ et $(\mathbf{Z}/33\mathbf{Z})^*$ sont-ils cycliques ? En donner, dans l'affirmative, un élément générateur.

Exercice 3

Soit $\sqrt{-3}$ une racine carré de -3 dans \mathbf{C} .

1. Démontrer que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{1}{2}(a + b\sqrt{-3}) \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}, a \equiv b \pmod{2} \right\}$$

muni de l'addition et de la multiplication usuelle est un anneau commutatif.

2. Démontrer que l'application $A \rightarrow A$ qui à $(a + b\sqrt{-3})/2$ associe $(a - b\sqrt{-3})/2$ est un homomorphisme d'anneaux. Est-ce un isomorphisme ?
3. Notons A^* le groupe des éléments inversibles de A . Démontrer qu'on a $(1 + \sqrt{-3})/2 \in A^*$. Quel est l'ordre de cet élément ?
4. Démontrer que l'application $N : A^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ qui à $(a + b\sqrt{-3})/2$ associe $(a^2 + 3b^2)/4$ est un homomorphisme de groupes (On remarquera qu'on a $(a^2 + 3b^2)/4 = ((a + b\sqrt{-3})/2)((a - b\sqrt{-3})/2)$). Démontrer que cet homomorphisme est à valeurs dans les nombres entiers > 0 .
5. En déduire que tout élément a de A^* vérifie $N(a)N(a^{-1}) = 1$ puis qu'un tel élément vérifie $N(a) = 1$. Déterminer tous les éléments de A^* . Le groupe A^* est-il cyclique ?