Université Paris 7-Denis Diderot — MT-282

D.E.U.G.- S.M. — Année 1998-99

EXAMEN de RATTRAPAGE du 23 janvier 1999

Durée : 1 h 15

Répondre aux questions suivantes en justifiant aussi brièvement que possible.

1. Démontrer que l'application $n \mapsto 2^n$ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbf{Z}, +)$ vers $(\mathbf{Q}^*, \times)$.

2. L'ensemble des nombres réels ≥ 0 muni de l'addition et de la multiplication forme-t-il un anneau ?

3. Déterminer toutes les solutions $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ de l'équation

$$36x + 48y = 22.$$

4. Résoudre le système de congruences :

$$x \equiv 3 \pmod 7$$

$$x \equiv 7 \pmod 3.$$

5. Calculer 2^{32} modulo 100 (c'est-à-dire déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{32} par 100).

6. L'équation $x^7 - 1 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$?

7. Donner un nombre entier $n > 2$ tel que 3 soit un générateur de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$.

8. Les groupes $((\mathbf{Z}/25\mathbf{Z})^*, \times)$ et $(\mathbf{Z}/20\mathbf{Z}, +)$ sont-ils isomorphes ?

9. Calculer $\phi(98)$.

10. Le nombre 91 est-il de Carmichael ?