Université Paris 7-Denis Diderot — MT-282
D.E.U.G.- S.M. — Année 1998-99

EXAMEN du 22 janvier 1999

Durée : 3 h

Exercice 1

La mairie du 5ème arrondissement de Paris envoie comme chaque fin d'année des chocolats à certains de ses administrés. La mairie achète des chocolats blancs, noirs et au lait par boîtes de 16, 25 et 40 respectivement. Elle constitue des ballotins de 5 chocolats blancs, 8 chocolats noirs et 13 chocolats au lait. Après avoir envoyé tous les ballotins il reste un chocolat de chaque sorte. Combien de ballotins ont été envoyés sachant qu'il y en avait plus de 100 et pas plus de 500 ?

Exercice 2

Soit p un nombre premier différent de 2. On note $\bar{x}$ la classe d'un entier x modulo p. On rappelle le théorème de Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
1. Démontrer que l'application $\bar{x} \mapsto -\bar{x}$ définit une bijection entre les sous-ensemble suivants de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: $\{\bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{\frac{p-1}{2}}\}$ d'une part et $\{\overline{\frac{p+1}{2}}, \overline{\frac{p+1}{2}+1}, ..., \overline{p-1}\}$ d'autre part.
2. Démontrer la formule

$$(\frac{p-1}{2})! \equiv (-1)^{(p-1)/2} \frac{(p-1)!}{(\frac{p-1}{2})!} \pmod{p}.$$

En déduire que $\overline{(\frac{p-1}{2})!}$ est d'ordre 4 dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ lorsque p est congru à 1 modulo 4. Dans ce cas donner une autre élément d'ordre 4.

Exercice 3

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers. Notons-les p_1, p_2, ..., p_k. Posons alors $n = p_1 p_2 ... p_k$.
1. Soit a un entier différent de 1 et -1. Démontrer que a n'est pas inversible modulo n. En déduire qu'on a $\phi(n) \leq 2$.
2. Donner l'expression de $\phi(n)$ en fonction des nombres premiers p_1, p_2, ..., p_k. Conclure que la finitude de l'ensemble des nombres premiers est une absurdité.

Exercice 4

Soit $(G, .)$ un groupe fini d'ordre n.
1. Soit $g_0 \in G$. Démontrer que l'application $G \longrightarrow G$ qui à g associe $g_0.g$ est bijective. Soit f une fonction $G \longrightarrow \mathbf{C}$. Déduire de ce qui précède qu'on a

$$\sum_{g \in G} f(g_0.g) = \sum_{g \in G} f(g).$$

2. Notons A l'ensemble des applications de G dans $\mathbf{C}$. Pour $f_1, f_2 \in A$, notons $f_1 + f_2$ et $f_1 * f_2$ les fonctions définies par

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g) \qquad \text{et} \qquad (f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}.g).$$

Démontrer que A muni des lois $+$ et $*$ est un anneau. Démontrer que si G est un groupe commutatif, A est un anneau commutatif.
3. Soit χ un homomorphisme de groupes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ (où $\mathbf{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe). Posons $S = \sum_{g \in G} \chi(g)$. Soit $g_0 \in G$. Démontrer qu'on a $\chi(g_0)S = S$. Si χ n'est pas constant égal à 1, en déduire qu'on a

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

4. Soit χ un homomorphisme de groupes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Soit $g \in G$. Démontrer que $\chi(g)$ est une racine n-ième de l'unité.
5. Soient χ et χ' deux homomorphismes de groupes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ qui sont distincts. Démontrer que l'application $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$ qui à g associe $\chi(g)/\chi'(g)$ est un homomorphisme de groupes. Démontrer qu'on a

$$\chi * \chi = n\chi \qquad \text{et} \qquad \chi * \chi' = 0.$$

A-t-on $\chi \in A^*$?
6. Soit χ un homomorphisme de groupes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Démontrer que l'application $A \longrightarrow \mathbf{C}$ qui à f associe $\sum_{g \in G} f(g)\chi(g)$ est un homomorphisme d'anneaux.
7. Supposons que G est cyclique et engendré par un élément g_0. Démontrer que si $\chi(g_0) = \chi'(g_0)$ on a $\chi = \chi'$. Combien y a-t-il d'homomorphismes de groupes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$? Soit g un élément de G distinct de l'élément neutre. Démontrer qu'on a

$$\sum_{\chi} \chi(g) = 0,$$

où la somme porte sur tous les homomorphismes $G \longrightarrow \mathbf{C}^*$.