UNIVERSITÉ DE PARIS 7
Année 2000-2001, DEUG 2ème année
Groupes et arithmétique (MT282)

4 Théorie des groupes

4.1

Soient a et b deux éléments d'un groupe $(G, \cdot)$. Montrer que :

1. Si a, b et ab sont d'ordre 2, alors a et b commutent.
2. Si a est d'ordre fini, alors a^{-1}, bab^{-1} sont également d'ordre fini et ont même ordre que a.
3. Si ab est d'ordre fini, alors ba aussi et a même ordre.
4. S'il existe $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que $a^n b^p = ba$, alors $a^{n-2}b^p$, $a^n b^{p-2}$ et ab^{-1} ont même ordre s'il est fini.

4.2

Montrer que $\{e^{2i\pi r},\ r \in \mathbf{Q}\}$ muni de la multiplication est un groupe infini dans lequel tout élément est d'ordre fini.

4.3

On note $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ et $SL_2(\mathbf{Z})$ respectivement : l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients entiers et l'ensemble de celles qui sont de déterminant 1.

1. Montrer que $SL_2(\mathbf{Z})$ est un groupe multiplicatif d'ordre infini. Est-il commutatif?
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de A, B et AB.

4.4

Soit G un groupe et X une partie de G. Montrer que $< X >$ le sous-groupe engendré par X est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X.
Remarque : $< X >$ est donc le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) contenant X.

4.5

Soit G un groupe noté multiplicativement, d'élément neutre e. Soient $x, y \in G$ tels que $xy = yx$. On suppose que x est d'ordre m, que y est d'ordre n, et que m et n sont premiers entre eux.

1. Montrer que $(xy)^{mn} = e$.
2. Soient $\langle x \rangle$ le sous-groupe de G engendré par x et $\langle y \rangle$ le sous-groupe engendré par y.
   Montrer que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$.
3. En déduire que xy est d'ordre mn.

4.6

1. Soient G et H deux groupes. Soient x un élément de G d'ordre m et y un élément de H d'ordre n. Montrer que (x, y) est d'ordre $ppcm(m, n)$ dans le groupe $G \times H$.
2. Soient G un groupe cyclique d'ordre m et H un groupe cyclique d'ordre n. Montrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

4.7

1. Soit G un groupe d'ordre premier. Quels sont les ordres possibles pour les éléments de G ? En déduire que G est cyclique.
2. Montrer que l'indice du centre $Z(G)$ d'un groupe G non commutatif ne peut pas être un nombre premier.

4.8 Groupe symétrique

Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments.

1. Donner l'ordre de tous les éléments de $\mathcal{S}_3$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_3$ est engendré par la transposition $\tau = (1, 2)$ et le cycle $\sigma = (1, 2, 3)$.
3. Soit dans $\mathcal{S}_n$ le cycle $\gamma = (c_1, c_2, \dots, c_k)$. Quel est l'ordre de γ ? Quel est l'ordre d'un produit de deux cycles à supports disjoints ?

4.9 Groupe du carré

Notations. - On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{R}^2$. s_1 (respectivement s_2) est la symétrie-réflexion par rapport à $\mathbf{R}e_1$ (respectivement $\mathbf{R}e_2$), s_3 (respectivement s_4) est la symétrie-réflexion par rapport à $\mathbf{R}(e_1 + e_2)$ (respectivement $\mathbf{R}(e_1 - e_2)$), et r_1 (respectivement r_2) est la rotation d'angle $\pi/2$ (respectivement $-\pi/2$).

Soient $G = \{id_{\mathbf{R}^2}; s_1; s_2; s_3; s_4; r_1; r_2; -id_{\mathbf{R}^2}\}$ et $X = \{e_1 + e_2; e_1 - e_2; e_2 - e_1; -e_1 - e_2\}$.

1. Soit $(\mathcal{B}(X), \circ)$ le groupe des bijections de $\mathbf{R}^2$ qui laissent X globalement invariant. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{B}(X)$. Décrire le centre $Z(G)$ de G.
2. G est-il isomorphe à $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$? Justifier. Donner l'ordre de chaque élément de G.
3. Décrire tous les sous-groupes de G.

4.10 Sous-groupes distingués

1. Soit G un groupe. Montrer que le centre de G est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que l'ensemble des matrices de déterminant 1 de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est un sous-groupe distingué de $GL_2(\mathbf{R})$.
3. Montrer que l'ensemble des permutations paires dans $\mathcal{S}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$.

4.11 Sous-groupe dérivé

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle *commutateur* de G un élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, avec $x, y \in G$. On appelle *sous-groupe dérivé* de G le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs. On le note $D(G)$.

1. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que le groupe quotient $G/D(G)$ est commutatif. C'est l'*abélianisé* de G.
3. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est commutatif si et seulement si $D(G) \subset H$.

4.12

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. On suppose K distingué dans G et on note $HK = \{hk,\ h \in H.\ k \in K\}$

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G et que K est un sous-groupe distingué de HK.
2. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de H.
3. Soit $\varphi : H \longrightarrow HK/K$ l'application qui a $h \in H$ associe la classe de h dans le quotient HK/K. Montrer que φ est un morphisme de groupes et qu'il factorise par $H/(H \cap K)$. Montrer alors que les groupes $H/(H \cap K)$ et HK/K sont isomorphes.

4.13

On note $(\mathcal{A}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}),+)$ le groupe des applications de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

1. Montrer que G, l'ensemble des homomorphismes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},+)$ dans $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z},+)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$.
2. Soit $k\in\mathbf{Z}$. A quelle condition le morphisme $f_k:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, $f_k(x)=\overline{k\,x}$ se factorise par $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$?
3. Montrer que G est cyclique et déterminer son ordre.