UNIVERSITÉ DE PARIS 7
Année 2000-2001, DEUG 2ème année
Groupes et arithmétique (MT282)

Feuille d'exercices n°2

2.1

Soient n et m deux entiers. Montrer que le produit mn est égal au produit de leur pgcd et de leur ppcm.

2.2

1. Calculer le pgcd d de $(42, 90)$.
2. Donner des entiers u et v tels que $42u + 90v = d$.
3. Donner tous les couples d'entiers (u, v) tels que $42u + 90v = d$.
4. Mêmes questions avec $(-7, 78)$, $(27, 129)$ et $(398, 600)$.

2.3

1. Soient a et b deux entiers, et r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $\mathsf{pgcd}(a, b) = \mathsf{pgcd}(b, r)$.
2. Soit n un entier. Déterminer $\mathsf{pgcd}(9n + 15, 4n + 7)$ en fonction de n.
3. Soit n un entier. Montrer que $\mathsf{pgcd}(n^2, 2n + 1) = 1$.

2.4

1. Trouver la plus grande puissance de 2 divisant 1000!.
2. Trouver le nombre de zéros figurant à la fin de l'écriture décimale de 1000!.

2.5

Le but de cet exercice est de déterminer pour quels entiers naturels n le réel

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est entier.

1. Soient a le plus grand entier tel que $2^a \leq n$, et b le plus grand entier tel que $2^b \,|\, n!$, *i.e.*, tel qu'il existe u impair satisfaisant $n! = 2^b u$. Montrer que pour tout $i \leq n$ on a

   $$2^b i \,|\, 2^a n!$$

   (On pourra poser $i = 2^c v$ avec v impair.)
2. Montrer que si i est distinct de 2^a alors $\frac{n!}{i2^{b-a}}$ est un entier pair. Qu'en est-il si $i = 2^a$?
3. On pose

   $$v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i2^{b-a}}.$$

   Que peut-on dire de v_n ? Exprimer u_n en fonction de v_n et conclure.

2.6

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n+5} + 3^{n+1}$ est multiple de 5 mais pas de 10.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est multiple de 30.

2.7 Une démonstration du petit théorème de Fermat :

1. Soit p un nombre premier. Montrer que si i est un entier tel que $1 < i < p$ alors $C_p^i \equiv 0 \mod p$.
2. Soit a et b deux entiers. Montrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$.
3. Si a est un entier, on a
$$a = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \text{ fois}}\cdot$$
Utiliser ceci pour montrer le petit théorème de Fermat :
Soit p un nombre premier. Alors pour tout entier a on a $a^p \equiv a \mod p$.
4. Ce théorème est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?

2.8

Soit p un nombre premier impair.

1. Démontrer que tout nombre entier n est congru modulo p à un unique entier de valeur absolue inférieure à $p/2$.
2. Démontrer que tout entier n est congru modulo p^2 à un unique entier de la forme $ap+b$ avec a et b entiers de valeurs absolues inférieures $p/2$. Dans ce qui suit lorsqu'on demande de calculer n modulo p^2, cela signifie déterminer a et b.
3. Désormais on suppose qu'on a $p = 1093$ (qui est un nombre premier). Décomposer $p-1 = 1092$ en produit de facteurs premiers. À quoi est égal 2^{1092} modulo p ?
4. Vérifier que les calculs de 3^7 et 2^{14} donnent respectivement $2p+1$ et $15p-11$ modulo p^2. En déduire le calcul de $3^2 2^{28}$ puis de $3^2 2^{26}$ modulo p^2 (on pourra utiliser que $-2970p+1089$ est congru à $-1876p-4$ modulo p^2).
5. À l'aide de la remarque $182 = 26 \times 7$ et de la formule du binôme en déduire le calcul de $3^{14}2^{182}$ modulo p^2. Comparer ce résultat au calcul de 3^{14} modulo p^2.
6. Calculer à l'aide de ce qui précède 2^{182} modulo p^2. En déduire le calcul de 2^{1092} modulo p^2.

2.9

Pour tout entier naturel non-nul n on note $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n (1 et n compris), et $\sigma(n)$ la somme des éléments de $D(n)$.

1. Soit m et n deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} D(m) \times D(n) & \longrightarrow & D(mn) \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$
est une bijection.
2. En déduire que si m et n sont premiers entre eux alors $\sigma(mn) = \sigma(m).\sigma(n)$.
3. Soit p un nombre premier, a un entier naturel. Calculer $\sigma(p^a)$.
4. En déduire une méthode de calcul de $\sigma(n)$ pour tout n, et calculer $\sigma(2000)$, $\sigma(2001)$.

2.10 Ecriture en base b et critère de divisibilité :

Soit n_0 et b des entiers naturels, n_0 étant non-nul et b strictement supérieur à 1, et $a_r, \ldots a_0$ les chiffres de n_0 dans son écriture en base b :
$$n_0 = [a_r,\, a_{r-1}, \ldots ,\, a_0]_b.$$

1. Exprimer n_0 en fonction de b et des a_i, $i = 0 \ldots r$.
2. Soit $n_1 = \sum_{i=0}^r a_i$. Montrer que $n_0 \equiv n_1 \mod (b-1)$.

3. On définit la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ par récurrence en posant : pour tout $k \geq 1$, n_k est la somme des chiffres de n_{k-1} dans son écriture en base b. Montrer que le suite (n_k) est décroissante et stationnaire.

4. Soit $l = \lim_k n_k$. Montrer que $1 \leq l \leq b - 1$.

5. Montrer que n_0 est multiple de $b - 1$ si et seulement $l = b - 1$.

2.11 Application

Soit n l'entier dont l'écriture en base 10 est 1134

1. Exprimer n en base 2, 3, 7, 8 et 16.

2. En déduire que n est divisible par 7.