Université Paris 7-Denis Diderot MT-282
D.E.U.G.- S.M. Année 2000-01

EXAMEN du 1er février 2001

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Lors d'une élection contestée d'une ville lointaine, où se présentent deux candidats A et B, on recompte des bulletins de vote. Les assesseurs chargés du recomptage des votes du candidat A sont très superstitieux et ils regroupent les bulletins par paquets de 13. Mais le dernier paquet n'est pas complet : il contient 9 bulletins. Les assesseurs chargés du candidats B sont informaticiens. Ils regroupent les bulletins par piles de 64, et trouvent que la dernière pile contient 2 bulletins. Sachant que 901 électeurs ont voté au cours de cette élection, déterminer combien de bulletins ont obtenus chacun des candidats. Dans cette ville, personne ne vote blanc ou nul et il n'y a pas de fraude électorale.

Exercice 2

Déterminer le plus petit nombre premier ≥ 2001. On justifiera.

Exercice 3

Notons G l'ensemble des classes modulo 100 des entiers congrus à 1 modulo 5 et qui sont inversibles modulo 100. On notera $\bar{k}$ la classe d'un entier k modulo 100. Ainsi on a $\mathbf{Z}/100\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{99}\}$.
1. Démontrer que G est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/100\mathbf{Z})^*$.
2. Quel est l'ordre de $(\mathbf{Z}/100\mathbf{Z})^*$?
3. À quoi sont congrus les éléments de G modulo 10 ? En déduire la liste des éléments de G.
4. Le groupe G est-il cyclique ? Indiquer un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 5 de G.

Problème

Soit $(K, +, .)$ un corps commutatif possédant 8 éléments. (On rappelle que cela signifie que K est un anneau, que tout élément de K non nul est inversible, et que la multiplication est commutative dans K.) On note 0_K et 1_K les éléments neutres de K pour l'addition et la multiplication respectivement. On note K^* l'ensemble des éléments inversibles de K. On pose, dans K, $2_K = 1_K + 1_K$, $3_K = 2_K + 1_K$, $4_K = 3_K + 1_K$ etc. On appelle *sous-corps* de K un sous-anneau de K qui est un corps.
1. En remarquant que $(K, +)$ est un groupe d'ordre 8, démontrer qu'on a $8_K = 0_K$ dans K.
2. Montrer l'égalité $8_K = 2_K^3$. En déduire qu'on a $2_K = 0_K$, puis qu'on a $x + x = 2_K.x = 0_K$ $(x \in K)$.
3. Démontrer que l'application $\phi_2 : K \to K$ qui à x associe x^2 est un homomorphisme d'anneaux.
4. Soit $\phi : K \to K$ un homomorphisme d'anneaux. Démontrer que $K_\phi = \{x \in K/\phi(x) = x\}$ est un sous-anneau de K. En déduire que $\{x \in K/x^2 = x\}$ est un sous-anneau de K.
5. Combien le polynôme $X^2 - X$ a-t-il de racines dans K ? Posons $K_0 = \{0_K, 1_K\}$. En déduire que $K_0 = \{x \in K/x^2 = x\}$ et que K_0 est un sous-corps de K.
6. Combien K^* possède-t-il d'éléments ? En déduire que tout élément x de K^* vérifie $x^7 = 1_K$, puis que tout élément y de K vérifie $y^8 = y$. Le groupe K^* est-il cyclique ?
7. Soit K_1 un sous-corps de K. Démontrer que K_1 possède 2, 4 ou 8 éléments. Démontrer que l'ordre du groupe K_1^* divise 7. En déduire qu'on a $K_1 = K_0$ ou $K_1 = K$.