UNIVERSITÉ DE PARIS 7
Année 2000-2001, DEUG 2ème année
Groupes et arithmétique (MT282)

Devoir n°3

1 Préliminaire

Pour tout entier n strictement positif, on définit l'entier $r(n)$ suivant, appelé *radical* de n :

$$r(1) = 1 \text{ et si } n \geq 2,\ r(n) = \prod_{p|n,\ p \text{ premier}} p$$

1. Calculer $r(15)$, $r(18)$, $r(256)$.
2. Quels sont les entiers de radical 10 ?
3. Montrer que $r(n) \leq n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.
4. Montrer que $r\left(\prod_{i=1}^{N} n_i^{\alpha_i}\right) = r\left(\prod_{i=1}^{N} n_i\right)$ où N, les n_i et les α_i sont des entiers strictement positifs.

2 La conjecture *abc*

Il existe en théorie des nombres , une conjecture (c'est-à-dire un résultat que l'on croit vrai mais qui n'est pas démontré) appelée conjecture *abc*, formulée de la manière suivante :

Conjecture *abc*
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une constante $K(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout triplet d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$ et $pgcd(a, b) = 1$ on ait :

$$c \leq K(\varepsilon)\,(r(abc))^{1+\varepsilon} \ .$$

1. Le but de cette question est de montrer par l'absurde que la conjecture n'est pas vraie avec $\varepsilon = 0$. On suppose donc qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout triplet d'entiers positifs vérifiant $a + b = c$ et $pgcd(a, b) = 1$ on ait : $c \leq Kr(abc)$.

   On considère l'ensemble $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \left\{u + v\sqrt{2} \ / \ u \in \mathbf{Z}, v \in \mathbf{Z}\right\}$. On admettra que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbf{R}$. On définit l'application $N : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbf{Z}$ par $N(u + v\sqrt{2}) = u^2 - 2v^2$.

   (a) Montrer que N est multiplicative, c'est-à-dire que $N(ww') = N(w)N(w')$ $(w \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}], w' \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}])$ et que $N(w) = 0$ si et seulement si $w = 0$.

   On définit les entiers u_n et v_n par la relation $(3 + 2\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$.

   (b) Montrer que $1 + 2v_n^2 = u_n^2$ et que $0 \leq v_n \leq u_n$.

   (c) Montrer que $v_{2n} = 2u_nv_n$.

   (d) En déduire que pour tout entier $m \geq 1$, 2^{m+1} divise v_{2^m}.

   (e) En appliquant l'hypothèse au triplet $(1, 2v_n^2, u_n^2)$ pour $n = 2^m$ montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$:

   $$K \geq 2^m \ .$$

   (f) Conclure.

2. On veut maintenant montrer le théorème suivant :

   Théorème
   Si la conjecture abc est vraie alors il n'y a qu'un nombre fini de triplets $(x^l, y^m, z^n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ *vérifiant l'équation*
   $$x^l + y^m = z^n$$
   avec $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ *et* $pgcd(x, y, z) = 1$.
   Remarques :
   - En particulier si $l = m = n$ on trouve que l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$ n'a qu'un nombre fini de solutions.
   - A ce jour, seules dix solutions sont connues. Voici les cinq plus simples :
   $1 + 2^3 = 3^2,\ 13^2 + 7^3 = 2^9,\ 17^3 + 2^7 = 71^2,\ 2^5 + 7^2 = 3^4,\ 3^5 + 11^4 = 122^2$.

   (a) Soit (x, y, z, l, m, n) vérifiant les hypothèses du théorème. Montrer que
   $$z^n \leq K(\varepsilon)(z^n)^{(1+\varepsilon)(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n})} .$$

   (b) En déduire que z^n est borné, puis qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions.

3. *Dans cette question, on suppose que la conjecture abc est vraie.*
   Montrer que l'ensemble $L = \left\{ \dfrac{\log c}{\log r(abc)} \ /\ (a, b, c) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*,\ a + b = c,\ pgcd(a, b) = 1 \right\}$ est majoré.

   (a) Donner explicitement la plus grande valeur de L que vous trouvez (on écrira les premiers chiffres de l'écriture décimale).