UNIVERSITÉ DE PARIS 7
Année 2000-2001, DEUG 2ème année
Groupes et arithmétique (MT282)

Devoir n°2

1 Le corps des quaternions

On considère les quatre éléments de $M_2(\mathbf{C})$ définis par

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

et le sous-ensemble $\mathbf{H}$ de $M_2(\mathbf{C})$ défini par

$$\mathbf{H} = \left\{ a1 + bI + cJ + dK = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \ / \ (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbf{R}^4 \right\}.$$

On munit $\mathbf{H}$ de l'addition et de la multiplication des matrices.

1. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-anneau de $M_2(\mathbf{C})$. Est-il commutatif ?

Dans la suite on abandonne les notations matricielles. On note

$$\mathbf{H} = \left\{ a + bi + cj + dk \ / \ (a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbf{R}^4 \right\},$$

où la matrice identité est identifiée à l'unité de $\mathbf{R}$, et les matrices I, J, K sont notées respectivement i, j, k. Si $\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$, on dit que α est un *quaternion* et que $(a,\, b,\, c,\, d)$ sont les *coordonnées* de α.

2. Soit α et α' deux quaternions, déterminer les coordonnées de $\alpha + \alpha'$ et de $\alpha\alpha'$.

3. Pour $\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$ on définit le *conjugué* $\bar{\alpha}$ de α et la *norme* $N(\alpha)$ de α par

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$$
$$N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$$

   Calculer $N(\alpha)$ en fonction de a, b, c, d. Montrer que pour α, $\beta \in \mathbf{H}$ on a $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$, puis que $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

4. En déduire que $\mathbf{H}$ est un corps.

5. Soit $\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$. On dit que α est *entier* dans $\mathbf{H}$ si $(a,\, b,\, c,\, d) \in \mathbf{Z}^4$ ou si a, b, c, d sont tous les quatres des demi-entiers, *i.e.,* s'écrivent sous la forme $n + \frac{1}{2}$ avec $n \in \mathbf{Z}$. On note $\mathbf{O}$ l'ensemble des entiers de $\mathbf{H}$.

   Montrer que $\mathbf{O}$ est un sous-anneau de $\mathbf{H}$, et que si $\alpha \in \mathbf{O}$ alors $N(\alpha) \in \mathbf{N}$.

6. Un élément α de $\mathbf{H}$ est appelé une *unité* si α et α^{-1} sont tous les deux des entiers de $\mathbf{H}$. On note $\mathbf{U}$ l'ensemble des unités de $\mathbf{H}$.

   Montrer que si $\alpha \in \mathbf{U}$ alors $N(\alpha) = 1$, puis que $\mathbf{U}$ a 24 éléments.

7. On dit qu'un entier α de $\mathbf{O}$ est *premier* si

$$\alpha = \beta\gamma \quad \text{avec} \quad \beta,\, \gamma \in \mathbf{O} \qquad \Longrightarrow \qquad \beta \text{ ou } \gamma \in \mathbf{U}.$$

   Montrer que les éléments $\{2,\, 3,\, 4,\, \ldots 20\}$ ne sont pas premiers dans $\mathbf{O}$.

8. Soit a, b, c, d, a', b', c', d' huit entiers naturels, et $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $n' = {a'}^2 + {b'}^2 + {c'}^2 + {d'}^2$. En utilisant la norme des quaternions, démontrer que le produit nn' est la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Remarque : On peut montrer qu'aucun élément de $\mathbf{N}$ supérieur à 1 n'est premier dans $\mathbf{O}$. Ceci permet de démontrer le théorème des quatre carrés :
Pour tout $n \in \mathbf{N}$*, il existe* a, b, c, $d \in \mathbf{N}$ *tels que* $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

2

Ce 11 Novembre, le régiment A a défilé. Un régiment défile toujours en rangée, et chaque rangée a le même nombre de soldats. Le 11 Novembre dernier, le régiment A a défilé en rangées de 16, mais 13 soldats s'étaient fait porter malade. Au cours du défilé du 14 Juillet dernier, il défilait par rangées de 15 avec 4 soldats absents, et le 8 Mai dernier il défilait en rangées de 20 avec 9 soldats absents.

Sachant qu'un régiment compte entre 750 et 1000 soldats, combien le régiment A a-t-il de soldats ?