Université Paris 7-Denis Diderot | MT-282
D.E.U.G.- S.M. | Année 2000-01

Devoir à la maison

À rendre en travaux dirigés la semaine du 24 octobre 2000

I. Groupes opérant sur un ensemble

Soient G un groupe et X un ensemble. On dit que G *opère* sur X s'il existe une application $G \times X \to X$ qui à (g, x) associe $g.x$ et qui vérifie les deux conditions

i) $g.(g'.x) = (gg').x$ $(g, g' \in G,\ x \in X)$,

ii) $e.x = x$ ($x \in X$, e est l'élément neutre de G).

On dit que G *opère trivialement* si on a $g.x = x$ $(g \in G,\ x \in X)$. On dit que G *opère librement* si $g.x = x$ entraîne $g = e$ $(g \in G,\ x \in X)$. On dit que G *opère transitivement* si pour tout $(x, y) \in X^2$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$. On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble E.

1. Démontrer que G opère sur lui-même d'une part par l'application $(g, g') \mapsto g.g' = gg'$ (c'est l'opération par *translation à gauche*) et d'autre part par l'application $(g, g') \mapsto g.g' = gg'g^{-1}$ (c'est l'opération *intérieure*). Dans quels cas ces opérations sont-elles triviales ou fidèles ?

2. Soit $x \in X$. Posons $H_x = \{g \in G / g.x = x\}$. Démontrer que H_x est un sous-groupe de G. C'est le *stabilisateur* de x dans G.

3. Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur X par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence s'appellent les *orbites* de X sous G. Démontrer que chaque orbite est en bijection avec G lorsque l'opération est libre. Combien y a-t-il d'orbites lorsque l'action est transitive ?

4. Soit H un sous-groupe de G. Pour $g \in G$, on pose $gH = \{gh \in G / h \in H\}$. Démontrer que la relation $\mathcal{R}_H$ sur G définie par $g\mathcal{R}_H g'$ si et seulement si $gH = g'H$ est d'équivalence. On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}_H$. Démontrer que gH est la classe d'équivalence de g. Lorsque G est un groupe fini (c'est-à-dire un groupe ne possédant qu'un nombre fini d'éléments), démontrer qu'on a $|G| = |H||G/H|$.

5. Soit $x \in X$. Considérons l'application $f_x : G \to X$ qui à g associe $g.x$. Démontrer que f_x est constante sur les classes de $\mathcal{R}_{H_x}$. En déduire qu'elle définit une bijection entre G/H_x et l'orbite O_x de x. Supposons que G soit un groupe fini. En déduire alors la relation

$$|G| = |O_x||H_x|.$$

6. Soit $x \in X$. On dit que c'est un *point fixe* de G si et seulement si on a $g.x = x$ $(g \in G)$. Démontrer que c'est le cas si et seulement si $H_x = G$, ou encore si et seulement si $O_x = \{x\}$.
7. Supposons que G soit un groupe fini d'ordre une puissance d'un nombre premier p. Supposons que l'ensemble X soit fini et de cardinal premier à p. Démontrer que chaque orbite de X est un singleton ou est de cardinal divisible par p. Démontrer que X est la réunion des orbites de $\mathcal{R}$. En déduire que le cardinal de X est congru modulo p au nombre de points fixes de G. En déduire que X admet au moins un point fixe de G.

II. Le groupe des quaternions

Posons $\mathbf{H} = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$. Démontrer que $\mathbf{H}$ est muni d'une unique loi de groupe $*$ vérifiant $x * (-y) = (-x) * y = -(x * y)$ $(x,\ y \in \mathbf{H}$, où on a convenu de poser $-(-x) = x)$, $i * i = j * j = k * k = -1$, $i * j = k$ et pour laquelle 1 est l'élément neutre.
1. Donner la table de multiplication de $\mathbf{H}$.
2. Quel est le centre de $\mathbf{H}$ (*i.e.* l'ensemble des éléments de $\mathbf{H}$ qui commutent à tout élément de $\mathbf{H}$) ? Le groupe $\mathbf{H}$ est-il commutatif ?
3. Quels sont les sous-groupes de $\mathbf{H}$?
4. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathbf{H}$ (*i.e.* les sous-groupes G vérifiant $hgh^{-1} \in G$ pour tout $(h, g) \in \mathbf{H} \times G)$? Quelles sont les orbites de l'opération intérieure de $\mathbf{H}$ sur lui-même (définie ci-dessus) ?
5. Soit n un entier naturel ≤ 10. Soit X un ensemble à n éléments. Pour quelles valeurs de n existe-il une opération libre de $\mathbf{H}$ sur X ? Pour quelles valeurs de n existe-il une opération transitive de $\mathbf{H}$ sur X ?