Université Paris 7-Denis Diderot MT-101
D.E.U.G.- S.M. Année 1999-00

EXAMEN du 7 septembre 2000

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soient α et β deux nombres complexes non nuls. Soit z un nombre complexe tel que $z^2 = \alpha\beta$.
1. Soit a un nombre complexe tel que $a^2 = \alpha$. Posons $b = z/a$. Démontrer qu'on a

$$|a|^2 + |b|^2 = \frac{|a+b|^2}{2} + \frac{|a-b|^2}{2}.$$

2. En déduire la relation

$$|\alpha| + |\beta| = |(\alpha+\beta)/2 + z| + |(\alpha+\beta)/2 - z|.$$

3. Supposons qu'on ait $\alpha = e^{\frac{i\pi}{3}+\log 2}$ et $\beta = e^{\frac{i\pi}{6}+\log 2}$. Choisir une valeur de z telle que $z^2 = \alpha\beta$. Placer α, β et z sur un diagramme représentant le plan complexe. Calculer $|(\alpha+\beta)/2 - z|$ et $|(\alpha+\beta)/2 + z|$.

Exercice 2

Rappelons que les applications $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ munies de l'addition et la multiplication par les réels constituent un espace vectoriel E. Soit F l'ensemble des applications $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont définies par $f(x) = a + be^x + cxe^x$ avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.
1. Démontrer que F muni de l'addition des applications et de la multiplication par les réels est un espace vectoriel. Démontrer que les applications $x \mapsto 1$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto xe^x$ en forment une base B. Quelle est la dimension de F ?

2. Considérons l'application $\phi : F \to F$ qui à f associe f'. Démontrer qu'elle est linéaire. Écrire sa matrice dans la base B. Quel est le noyau de ϕ ? Quel est le rang de ϕ ?
3. Calculer les matrices de ϕ^2 et ϕ^3 dans la base B. L'application ϕ est-elle une projection ? Est-elle une symétrie ?

Exercice 3

1. Démontrer que l'application $f :]-1,1] \to \mathbf{R}$ qui à x associe $\mathrm{Arctg}\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ est continue. Montrer qu'elle est dérivable sur $]-1,1[$.
2. Déterminer les applications dérivées des applications qui à x associent $(1-x)/(1+x)$, $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ et $\mathrm{Arctg}\sqrt{(1-x)/(1+x)}$.
3. En déduire l'identité, pour $x \in]-1,1]$,

$$\mathrm{Arctg}\sqrt{(1-x)/(1+x)} = \frac{1}{2}\mathrm{Arccos} x.$$

4. En déduire que f se prolonge par continuité en -1. Le prolongement est-il dérivable en -1 ?

Exercice 4

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction sinus.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction qui à x associe $\sin^2 x$.
3. Démontrer que la quantité $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ tend vers une limite, que l'on calculera, lorsque x tend vers 0.
4. Quelle est la limite, si elle existe, de $|\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x}|$ lorsque x tend vers 0 ? En déduire la limite, lorsque x tend vers 0, de $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. (On pourra utiliser la formule $|\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}| = |\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{x}||\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}|$.)