Université Paris 7-Denis Diderot MT-101
D.E.U.G.- S.M. Année 1999-00

EXAMEN PARTIEL du 11 janvier 2000

Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Soit f une application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Rappeler à quelle condition f est une application continue en 0.
2. Donner un exemple d'application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui n'est pas continue en 0.

Exercice 2

Notons f la fonction $\mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $\sqrt{x}+1$. Notons $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 20$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. Démontrer que toutes les valeurs de la suite sont > 0.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est de même signe que $f(u_n) - f(u_{n-1})$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente. Notons l sa limite.
4. Démontrer que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+$. Démontrer que la suite $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers l. En déduire que $f(l) = l$.
5. Calculer l.

Exercice 3

Soit f la fonction $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $\sin x/(1 + x^2)$.
1. Démontrer que f est bornée, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. En quels points f est-elle nulle ? Démontrer que la dérivée de f s'annule deux fois au moins sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Exercice 4

Soit f la fonction $]1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $(\log(x^2+1) - \log 2)/(x-1)$.
1. Démontrer que f est continue et dérivable sur $]1, +\infty[$.
2. Démontrer que f se prolonge par continuité en une fonction $[1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$. Cette fonction est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer f'. Démontrer que $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1.