Université Paris 7-Denis Diderot — MT-101
D.E.U.G.- S.M. — Année 1999-00

EXAMEN PARTIEL du 7 décembre 1999

Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Dans un espace vectoriel E, rappeler la définition d'une famille libre, d'une famille génératrice et d'une base.

Exercice 2

On rappelle que l'ensemble E des applications $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel réel. Soit $F = \{f \in E / f(1) = f(-1)\}$.
1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Démontrer que l'application $\phi : F \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à f associe $f(0)$ est linéaire.

Exercice 3

Considérons l'application $u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ donnée par

$$u(x, y, z) = (x - y - z, -z, -z).$$

1. Montrer que u est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique B de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer le rang de u. En déduire la dimension du noyau de u. Donner des bases de l'image et du noyau de u.
3. Le noyau et l'image de u sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ qui sont en somme directe ?
4. Posons $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que la famille $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$. Écrire la matrice P de passage de B à B'. Calculer P^{-1}. En déduire la matrice M' de u dans la base B'.
5. Calculer $u(v_1)$, $u(v_2)$ et $u(v_3)$.
6. Soit n un entier ≥ 1. Calculer M'^n. En déduire M^n.
7. L'application u est-elle une symétrie ? Est-elle une projection ?