

EXAMEN PARTIEL du 26 octobre 1999

Durée : 2 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

1. Donner la définition d'une application injective. Exprimer le fait qu'une application f d'un ensemble E vers un ensemble F n'est pas injective.
2. Donner un exemple d'une application injective mais pas surjective, puis d'une application surjective mais pas injective.

Exercice 2

Trouver les solutions dans \mathbf{C} de l'équation

$$z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 7i) = 0.$$

Exercice 3

1. Représenter dans le plan complexe les ensembles $D = \{z \in \mathbf{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$ et $B = \{z \in \mathbf{C} / |z| < 1\}$.
2. Démontrer que si $z \in D$, on a $(1 + z)/(1 - z) \in B$. Démontrer que l'application f qui à z associe $(1 + z)/(1 - z)$ définit une bijection entre D et B . Donner la formule de la bijection réciproque.

Exercice 4

Posons

$$A_0 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

et

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x + y + |z| = 0\}.$$

Lesquels parmi ces sous-ensembles de \mathbf{R}^3 sont des sous-espaces vectoriels ? On justifiera la réponse.