Université Paris 7-Denis Diderot
D.E.U.G.- S.M.

MT-101
Année 1999-00

EXAMEN du 18 janvier 2000

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

Exercice 1

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\bar{z}^3 = -z$.
1. Montrer que $|z| = 1$.
2. Déterminer quelles sont les valeurs possibles de z. On donnera les parties réelles, imaginaires et les arguments.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
1. Rappeler à quelle condition F_1 et F_2 sont supplémentaires.
2. Soit f un endomorphisme de E de noyau F_1 et d'image F_2. Démontrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
3. Supposons que $f \circ f = f$. Démontrer que f est l'identité sur F_2 et est nulle sur F_1. En déduire que c'est un projecteur sur F_2 parallèlement à F_1.

Exercice 3

Soit a un nombre réel. Soit f l'application $\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ qui au triplet (x, y, z) associe $(x + ay + z, x + y + az, ax + y + z)$.
1. Démontrer que f est linéaire.
2. Lorsque $a = 0$ ou lorsque $a = -2$, calculer le rang de f. En déduire la dimension du noyau de f.

3. Lorsque $a \neq -2$ et $a \neq 0$, déterminer le noyau de f. En déduire le rang de f.

Exercice 4

Pour tout nombre réel t posons

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R}).$$

1. Soient $t, t' \in \mathbf{R}$. Démontrer qu'on a $M(t+t') = M(t)M(t')$.
2. Calculer $M(0)$. En déduire que $M(t)$ est toujours inversible et calculer son inverse.
3. Pour quelles valeurs de t la matrice $M(t)$ est-elle la matrice d'une symétrie ?

Exercice 5

On note log le logarithme néperien.
1. Vérifier que tout nombre réel x vérifie $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. En déduire l'existence de la fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui à x associe $\log(x + \sqrt{x^2+1})$.
2. Montrer que f est continue et dérivable. Calculer f'.
3. Démontrer que la quantité $f(x)/\log(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Calculer cette limite.
4. Même question avec la quantité $f(x)/\log(-x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
5. Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction qui à x associe $x + \sqrt{x^2+1}$. Rappeler quel est le développement limité en 1 à l'ordre n de la fonction logarithme. En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.