Université Paris 7-Denis Diderot MT-101
D.E.U.G.- S.M. Année 1999-00

Corrigé de l'EXAMEN du 18 janvier 2000

Exercice 1

1. On a $|z|^6 = z^3\bar{z}^3 = (-\overline{z})(-z) = \bar{z}z = |z|^2$. Comme z est non nul, on a $|z|^4 = 1$. Comme $|z|$ est un réel positif, on a $|z| = 1$.
2. Posons $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbf{R}$. On a donc $e^{-3i\theta} = \bar{z}^3 = -z = e^{i\theta+i\pi}$ et donc $e^{-4i\theta} = e^{i\pi}$ ou encore $e^{4i\theta} = e^{i\pi}$. On en déduit que $z = e^{i\theta} = e^{2ki\pi/4}e^{i\pi/4}$, avec $k \in \{0,1,2,3\}$. Il y a donc quatre valeurs possibles de z : $z = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ (d'argument $\pi/4$), $z = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$ (d'argument $3\pi/4$), $z = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ (d'argument $5\pi/4$) et $z = \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ (d'argument $7\pi/4$),

Exercice 2

1. Deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont supplémentaires si on a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $F_1 + F_2 = E$.
2. Si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, un calcul de dimension donne

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim\ F_1 + \dim\ F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = \dim\ F_1 + \dim\ F_2$$

$$= \dim\ \mathrm{Ker\,f} + \dim\ \mathrm{Im}\, f = \dim\ E.$$

Le seul sous-espace vectoriel de E qui a même dimension que E est E lui-même. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont donc supplémentaires.

Réciproquement, si F_1 et F_2 sont supplémentaires, on a $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ par définition.
3. Soit $x \in F_2 = \mathrm{Im}\, f$. Il existe $y \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(x) = f(f(y)) = f \circ f(y) = f(y) = x$, si bien que f est l'identité sur F_2. Comme F_1 est le noyau de f, f est nulle sur F_1.

Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On $f(x) = x$ (car $x \in F_2$) et $f(x) = 0$ (car $x \in F_1$). On a donc $x = 0$. Cela prouve que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Les sous-espaces F_1 et F_2 sont donc supplémentaires d'après 2. Cela fait de f un projecteur.

Exercice 3

1. Soient (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbf{R}^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$f((x,y,z) + (x',y',z')) = f((x+x', y+y', z+z'))$$

$$= (x + x' + a(y + y') + z + z', x + x' + y + y' + a(z + z'), a(x + x') + y + y' + z + z')$$

$$= (x + ay + z, x + y + az, ax + y + z) + (x' + ay' + z', x' + y' + az', ax' + y' + z')$$
$$= f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

et

$$f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda(x + ay + z), \lambda(x + y + az), \lambda(ax + y + z)) = \lambda f(x, y, z).$$

Cela prouve que f est linéaire.
2. Examinons le cas où $a = 1$. On a

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z) = (x + y + z)(1, 1, 1).$$

L'image de f est contenue dans la droite D engendrée par $(1, 1, 1)$ et elle est non nulle. C'est donc D. Le rang de f est donc 1. La dimension du noyau de f est alors $3 - 1 = 2$.

Examinons le cas où $a = -2$. On a $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x + y - 2z, -2x + y + z)$. On a $x - 2y + z + x + y - 2z - 2x + y + z = 0$, si bien que tout élément de l'image de f se trouve dans le plan $P = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 / u + v + w = 0\}$. Le rang de f est donc ≤ 2. Par ailleurs, en posant $(x, y, z) = (0, 1, -1)$ et $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$, on constate que les vecteurs $(-3, 3, 0)$ et $(0, 3, -3)$, qui sont linéairement indépendants, sont dans l'image de f. Le rang de f est donc ≥ 2. Il vaut donc 2.
3. Soit (x, y, z) un élément du noyau de f. On a les équations (1) $x + ay + z = 0$, (2) $x + y + az = 0$ et (3) $ax + y + z = 0$. Les équations (1) et (2) entraînent $ay + z = y + az$, c'est-à-dire $(a - 1)z = (a - 1)y$. On en déduit $y = z$ puisque $a \neq 1$. On obtient de même $x = y$ grâce aux équations (1) et (3). On a donc $x = y = z$. En remplaçant dans l'équation (1), cela entraîne $(a + 2)x = 0$, et donc $0 = x = y = z$ puisque $a \neq -2$. Le noyau de f est donc $\{0\}$. Le rang de f est donc $3 - 0 = 3$, d'après le théorème de la dimension.

Exercice 4

1. On a, en utilisant la relation $e^{t+t'} = e^t e^{t'}$,

$$M(t)M(t') = \begin{pmatrix} e^t & -te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t'} & -t'e^{t'} & 0 \\ 0 & e^{t'} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t'} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^t e^{t'} & -te^t e^{t'} - e^t t' e^{t'} & 0 \\ 0 & e^t e^{t'} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} e^{-t'} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t'+t} & -(t + t')e^{t'+t} & 0 \\ 0 & e^{t'+t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t'-t} \end{pmatrix} = M(t + t').$$

2. Notons I_3 la matrice identité dans $\mathbf{R}^3$. On a

$$M(0) = \begin{pmatrix} e^0 & -0.e^0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

On a $I_3 = M(0) = M(t-t) = M(t)M(-t)$. La matrice $M(t)$ est donc inversible d'inverse $M(-t)$.
3. Comme toute symétrie s vérifie $s^2 = \mathrm{Id}$, si $M(t)$ est la matrice d'une symétrie on a $M(t)^2 = I_3$. Comme $M(t)^2 = M(2t)$, on en déduit que $M(2t) = I_3$. s Si $2t \neq 0$, on a $M(2t) \neq I_3$ (car les termes diagonaux de $M(2t)$ sont alors différents de 1). Si $t = 0$, on a $M(0) = I_3$, qui est la matrice d'une symétrie

Exercice 5

1. Si $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, on a $\sqrt{x^2+1} = |x|\sqrt{1+1/x^2} > |x|$, car $\sqrt{1+1/x^2} > 1$, si bien que $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. L'inégalité est trivialement vérifiée pour $x = 0$. La fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$, si bien que $\log(x + \sqrt{x^2+1})$ est défini pour $x \in \mathbf{R}$.
2. Lorsque $x \in \mathbf{R}$, x^2+1 est > 0, et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, si bien que que $\sqrt{x^2+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$. Comme la fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et à valeurs > 0, et comme la fonction log est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

On a $f'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}$.
3. On a, pour x nombre réel > 0,

$$f(x)/\log x = \log(x + \sqrt{x^2+1})/\log x$$

$$= (\log x + \log(1 + \sqrt{1+1/x^2}))/\log x = 1 + \log(1 + \sqrt{1+1/x^2}))/\log x.$$

Comme $1 + 1/x^2$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, $\log(1 + \sqrt{1+1/x^2})$ tend vers log 2 et $\log(1 + \sqrt{1+1/x^2}))/\log x$ tend donc vers 0. Comme $\log x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)/\log x$ tend vers 1.
4. On a, pour x nombre réel < 0,

$$f(x)/\log(-x) = (\log(-x) + \log(-1 + \sqrt{1+1/x^2}))/\log(-x)$$

$$= 1 + \log(-1 + \sqrt{1+1/x^2})/\log(-x).$$

Posons $y = 1/x$ et faisons tendre y vers 0. On a

$$f(x)/\log(-x) = 1 - \log(-1 + \sqrt{1+y^2})/\log(-y).$$

Effectuons un développement limité de $\sqrt{1+y^2}$ en 0 ; il se déduit du développement de $\sqrt{1+t}$ en 0, en composant avec $t = y^2$. On a $\sqrt{1+y^2} = 1 + y^2/2 + y^3\epsilon(y)$, avec $\epsilon(y)$ tend vers 0 lorsque y tend vers 0. On a donc

$$f(x)/\log(-x) = 1 - \log(y^2/2 + y^3\epsilon(y))/\log(-y) = 1 - 2 - \log(1/2 + y\epsilon(y))/\log(-y),$$

cette dernière quantité tend vers -1 lorsque $y = 1/x$ tend vers 0. Si bien que $f(x)/\log(-x)$ tend vers -1 lorsque x tend vers $-\infty$.

5. Utilisons le développement limité de $\sqrt{1+x^2}$ en 0 trouvé ci-dessus. On en déduit

$$x + \sqrt{x^2+1} = 1 + x + x^2/2 + x^3\epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

On a $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + ... - (-1)^n x^n/n + x^n\epsilon_0(x)$, avec $\epsilon_0(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Le développement limité en 1 s'écrit donc

$$\log(t) = (t-1) - (t-1)^2/2 + (t-1)^3/3 + ... - (-1)^n(t-1)^n/n + (t-1)^n\epsilon_0(t-1).$$

On en déduit que f a pour développement limité à l'ordre 3 en 0 (par composition des développements limités) : $f(x) = (x + x^2/2) - (x + x^2/2)^2/2 + (x + x^2/2)^3/3 + x^3\epsilon_1(x)$, avec $\epsilon_1(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a donc

$$f(x) = x - x^3/6 + 3x^4/8 + x^4 + x^5/4 + x^6/24 + x^3\epsilon_1(x).$$

En négligeant les termes de degré ≥ 4, on obtient le développement limité cherché

$$f(x) = x - x^3/6 + x^3\epsilon_2(x),$$

avec $\epsilon_2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.