M.M.F.A.I.
Analyse Complexe Année 2002-03

EXAMEN PARTIEL du 2 avril 2003

Durée : 2h

Exercice 1

1. Démontrer qu'il existe une unique fonction méromorphe f sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+$ qui vérifie

$$f(x) = \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}$$

$(x \in \mathbf{R}_- - \{-1, -2\})$.
2. Que valent alors $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x - i\epsilon)$ et $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x + i\epsilon)$, lorsque $x \in \mathbf{R}$ et $x > 0$?
3. Déterminer les pôles et les résidus de f.
4. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}\, dx.$$

Exercice 2

Posons $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} / |z| < 1\}$. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est *univalente* si elle est holomorphe et injective. Soit f une fonction univalente sur $\mathbf{D}$ de développement de Taylor en 0 égal à $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
1. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $|\alpha| = 1$. Démontrer que la fonction $z \mapsto z/(1-\alpha z)^2$ est univalente sur $\mathbf{D}$.
2. Soit g une fonction univalente sur $\mathbf{C} - \bar{\mathbf{D}}$. Supposons qu'il existe une suite de nombres complexes $(b_n)_{n=0,1,\ldots}$ telle que g s'écrive $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ $(z \in \mathbf{C} - \bar{\mathbf{D}})$. Soit r un nombre réel > 1. Considérons le lacet $c_r : t \mapsto re^{2i\pi t}$. On admet que la quantité $\frac{1}{2i}\int_{g\circ c_r} \bar{z}\, dz$ est un nombre réel ≥ 0 (c'est l'aire du domaine de $\mathbf{C}$ borné par l'image de $g \circ c_r$). Démontrer qu'on a $\frac{1}{2i}\int_{g\circ c_r} \bar{z}\, dz = \pi(r^2 - \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 r^{-2n})$. En déduire que $|b_1| \leq 1$.
3. Soit h une fonction univalente et impaire sur $\mathbf{D}$, de développement de Taylor en 0 égal à $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$. Démontrer qu'on a $|c_3| \leq |c_1|$.
4.a Montrer que l'application $z \mapsto f(z^2) - a_0$ admet une racine carrée univalente et impaire.
4.b Démontrer qu'on a $|a_2| \leq 2|a_1|$.
4.c Démontrer de plus que si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $|a_2| = 2$, il existe un nombre complexe α de module 1 tel que $f(z) = z/(1-\alpha z)^2$.
5. On suppose que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ (ce qui est toujours possible quitte à considérer la fonction $z \mapsto (f(z) - a_0)/a_1$). Soit r le plus grand rayon d'une boule ouverte centrée en 0 et contenue dans $f(\mathbf{D})$.
5.a Démontrer qu'on a une application $\mathbf{D} \to \mathbf{D}$ holomorphe qui à z associe $f^{-1}(rz)$. Déterminer la dérivée en 0 de cette application. En déduire que $r \leq 1$.
5.b Soit $w \in \mathbf{C} - f(\mathbf{D})$. Démontrer que l'application $z \mapsto w^2/(w - f(z))$ est univalente sur $\mathbf{D}$. En déduire que $|a_2 + 1/w| \leq 2$, puis que $r \geq 1/4$.

Remarque : On peut aller plus loin dans l'étude des fonctions univalentes sur $\mathbf{D}$. L'assertion $|a_n| \leq n|a_1|$ (n entier ≥ 1) a été proposée en 1916 par Bieberbach. La démonstration a fait l'objet d'environ un millier d'articles avant d'être obtenue en 1984 par L. De Branges.