M.M.F.A.I.
Analyse complexe
Année 2002-03

Corrigé de l'EXAMEN PARTIEL du 2 avril 2003

Exercice 1

1. Il existe une (unique) fonction holomorphe h sur $\mathbf{C}-\mathbf{R}_+$ qui vaut -1 en -1 et qui vérifie $h(z)^3=z$. En effet $\mathbf{C}-\mathbf{R}_+$ est simplement connexe et ne contient pas 0. La fonction $z\mapsto h(z)^2/(z+1)(z+2)^2$ est alors méromorphe sur $\mathbf{C}-\mathbf{R}_+$ et prolonge la fonction $x\mapsto x^{2/3}/(x+1)(x+2)^2$ sur $\mathbf{R}_-^*$. Comme ce dernier ensemble admet des points d'accumulation, on a l'unicité du prolongement.
2. Posons $j=e^{2i\pi/3}$. On a $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} h(x-i\epsilon)=-j^2x^{1/3}$ et donc $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x-i\epsilon)=jx^{2/3}/(x+1)(x+2)^2$. De même, on a $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} f(x+i\epsilon)=j^2x^{2/3}/(x+1)(x+2)^2$.
3. Ces pôles sont situés en $z=-1$ et $z=-2$. Les résidus sont respectivement $(x^{2/3}/(x+2)^2)_{x=-1}=1$ et $(\frac{d}{dx}(\frac{x^{2/3}}{x+1}))_{x=-2}=-2^{5/3}/3$.
4. Soit R un nombre réel >0. Considérons les chemins suivants :
– un chemin rectiligne c_1 reliant $1/R+i/R$ à $R+i/R$,
– un chemin c_2 évitant $\mathbf{R}_+$, à support dans le cercle de centre centre 0 et de rayon $\sqrt{R^2+1/R^2}$ et reliant $R+i/R$ à $R-i/R$,
– un chemin rectiligne c_3 reliant $R-i/R$ à $1/R-i/R$ et
– un chemin c_4 évitant $\mathbf{R}_+$ et à support dans le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}/R$ reliant $1/R-i/R$ à $1/R+i/R$.
Le lacet $c=c_1.c_2.c_3.c_4$ est d'indice 1 par rapport aux résidus de f. D'après le théorème des résidus, on a

$$2i\pi(1-2^{5/3}/3)=\int_{c_1} f(z)\,dz+\int_{c_2} f(z)\,dz+\int_{c_3} f(z)\,dz+\int_{c_4} f(z)\,dz.$$

Posons $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2/3}}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$. Lorsque R tend vers l'infini, on a $\int_{c_4} f(z)\,dz\to 0$ (car $f(z)\to 0$ lorsque z tend vers 0), $\int_{c_2} f(z)\,dz\to 0$ (car $f(z)=O(|z|^{-7/3})$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini et le support de c_2 est de longueur $O(R)$), $\int_{c_1} f(z)\,dz\to j^{-1}I$ et $\int_{c_3} f(z)\,dz\to -jI$ (en utilisant les limites calculées plus haut). On a donc $-\sqrt{3}iI=(j^{-1}-j)I=2i\pi(1-2^{5/3}/3)$ et donc $I=2\pi(2^{5/3}/3-1)/\sqrt{3}$.

Exercice 2

1. Cette fonction est holomorphe, car c'est une fonction rationnelle sans pôle dans $\mathbf{D}$. Montrons qu'elle est injective. Pour $u\in\mathbf{C}$, l'équation $u=z/(1-\alpha z)^2$ se ramène à $z^2+(\frac{1}{u\alpha^2}-\frac{2}{\alpha})z+\frac{1}{\alpha^2}=0$. L'image réciproque de u est l'ensemble des racines d'un polynôme du second degré. Comme $|\alpha|=1$, les racines de ce polynôme sont de produit de module 1 et ne peuvent donc être toutes deux dans $\mathbf{D}$.
2. On a $\frac{1}{2i}\int_{g\circ c_r}\bar z\,dz=\frac{1}{2i}\int_{c_r}\bar g(z)g'(z)\,dz$ (car g est injective). Remplaçons g et g' par leur développements en séries et calculons chaque terme. On a $\int_{c_r}\bar b_n m b_m \bar z^{-n}z^{-m-1}\,dz=0$, sauf si $n=m$ auquel cas on a $\int_{c_r}\bar b_n m b_m \bar z^{n}z^{-m-1}\,dz=2i\pi n|b_n|r^{-2n}$ ($n,\, m\in\mathbf{Z}$). On a donc $\frac{1}{2i}\int_{g\circ c_r}\bar z\,dz=\pi(r-\sum_{n=0}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n})\geq 0$. En faisant tendre r vers 1, on trouve $|b_1|^2\leq\sum_{n=0}^{\infty}n|b_n|^2\leq 1$.
3. Comme h est univalente, on a $c_1\neq 0$. Considérons la fonction $g:\ z\mapsto c_1/h(1/z)$, définie sur $\mathbf{C}-\bar{\mathbf{D}}$ et qui admet un développement de Laurent à l'infini donné par $z-(c_3/c_1)/z+\ldots$ Elle est impaire et univalente. On applique 2.
4.a L'unique zéro dans $\mathbf{D}$ de $z\mapsto f(z^2)-a_0$ est en $z=0$. C'est un zéro double, car $a_1\neq 0$ (sinon f ne serait pas injective au voisinage de 0, et donc pas univalente). La fonction $z\mapsto(f(z^2)-a_0)/z^2$ est donc sans zéro

sur $\mathbf{D}$. Elle admet donc une racine carrée holomorphe ϕ ; la fonction $h : z \mapsto z\phi(z)$ est donc une racine carrée de $z \mapsto f(z^2) - a_0$. C'est une fonction impaire, car ϕ est paire ; en effet la fonction $z \mapsto \phi(z)/\phi(-z)$ est de carré constant et vaut 1 en $z = 0$. On en déduit l'injectivité de $z \mapsto z\phi(z)$ de l'imparité de ϕ et de l'injectivité de f.
4.b La fonction h considérée en 4.a vérifie les hypothèses de 3. et a pour développement de Taylor en 0 $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$ avec $c_1^2 = a_1$ et $2c_2c_3 = a_2$. On conclut en appliquant 3.
4.c Réexaminons les inégalités établies précédemment. On a $|a_2| = 2|a_1|$ en 4.b et donc $|c_3| = |c_1|$ en 3. ce qui revient à $|b_1| = 1$ en 2. Cela impose $b_n = 0$ (n entier ≥ 2) et $b_0 = 0$. On a donc $g(z) = z + b_1/z$, $h(z) = 1/(b_1 z + 1/z)$ et donc $f(z^2) = z^2/(b_1 z^2 + 1)^2$.
5.a Comme f est injective, comme la boule de centre 0 et de rayon r est contenue dans $\mathbf{D}$ et comme $z \mapsto rz$ est biholomorphe, on a bien une réciproque holomorphe à $z \mapsto f(rz)$. On a $f'(0) = a_1 = 1$; la dérivée cherchée vaut donc r. Appliquons le lemme de Schwarz à cette fonction, on a bien $r \leq 1$.
5.b L'application $z \mapsto w^2/(w - z)$ est holomorphe (en dehors de w) et injective. Comme f est univalente, que la composée de fonctions univalentes est univalente et que $w \notin f(\mathbf{D})$, $z \mapsto w^2/(w - f(z))$ est univalente sur $\mathbf{D}$. Le développement de Taylor en 0 de cette fonction est $w + z + (a_2 + 1/w)z^2 + ...$ Comme elle est univalente, on a $|a_2 + 1/w| \leq 2$, d'après 4.b, et donc $1/|w| \leq 2 + |a_2| \leq 4$. Comme $r = \inf\{|w|/w \in \mathbf{C} - f(\mathbf{D})\}$, on a $r \geq 1/4$.