M.M.F.A.I.
Analyse Complexe Année 2002-03

EXAMEN du 11 juin 2003

Durée : 3h

I

Notons $\rho(t)$ la partie fractionnaire d'un nombre réel t. On considère la fonction ζ de Riemann et la fonction Γ d'Euler. Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \Re(s) < 1$.
1. Démontrer la relation $-\zeta(s)/s = \int_0^\infty \rho(t)t^{-s-1}\,dt$.
2. En déduire successivement les formules,

$$(2^s-1)\zeta(s)/s = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}(\sin(4\pi nt) - \sin(2\pi nt))t^{-s-1}\,dt = -(2^s-1)2^s\pi^{s-1}\Gamma(-s)\sin(\pi s/2)\zeta(1-s),$$

puis retrouver l'équation fonctionnelle de ζ.

II

Pour n un entier > 0, on pose $\mu(n) = (-1)^k$ si n est le produit de k nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ sinon. On pose $M(n) = \sum_{t=1}^n \mu(t)$. On considère la fonction ζ de Riemann.
1. Démontrer qu'on a, pour n entier > 1, $\sum_{d|n}\mu(d) = 0$. En déduire l'identité $1/\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n)n^{-s}$ (s nombre complexe de partie réelle > 1).
2. Supposons qu'on ait, pour tout $\epsilon > 0$, $M(n) = O(n^{1/2+\epsilon})$. Démontrer que $\zeta(s) \neq 0$ lorsque $\Re(s) > 1/2$.

III

Soit L un réseau de $\mathbf{C}$ de base (ω_1, ω_2), avec $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$, et de fonction de Weierstrass associée $\mathcal{P}$.
1. Soit $z \in \mathbf{C} - L$. Démontrer que la série de la variable complexe z

$$\frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L-\{0\}} \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}$$

converge absolument vers une fonction méromorphe Z. Quels sont les pôles et les résidus de Z ? Démontrer qu'on a $Z' = -\mathcal{P}$.
2. Démontrer que $2\eta_1 = Z(\omega_1+z) - Z(z)$ ne dépend pas de z et qu'on a $\eta_1 = Z(\omega_1/2)$. On pose $\eta_2 = Z(\omega_2/2)$.
3. Démontrer la relation $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \pi i$.
4. Posons $E(z) = (1-z)e^{z+z^2/2}$ ($z \in \mathbf{C}$). Établir l'inégalité $|E(z) - 1| \leq 2|z|^3$ ($|z| \leq 1/2$).
5. Démontrer que le produit

$$z \prod_{\omega \in L-\{0\}} (1 - \frac{z}{\omega})e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}}$$

converge vers une fonction entière, notée σ. Quels sont les zéros de σ ? Démontrer qu'on a $Z = \sigma'/\sigma$.
6. Démontrer la relation $\sigma(z+\omega_1) = -\sigma(z)e^{2\eta_1(z+\omega_1/2)}$ ($z \in \mathbf{C}$).
7. Soient u, $v \in \mathbf{C} - L$. Démontrer que les fonctions données par $z \mapsto -\sigma(z+v)\sigma(z-v)/(\sigma(z)^2\sigma(v)^2)$ et $z \mapsto -\sigma(u+z)\sigma(u-z)/(\sigma(z)^2\sigma(u)^2)$ sont elliptiques.
8. En déduire les formules

$$\mathcal{P}(u) - \mathcal{P}(v) = -\sigma(u+v)\sigma(u-v)/(\sigma(v)^2\sigma(u)^2),$$

$$-\frac{\mathcal{P}'(v)}{\mathcal{P}(u) - \mathcal{P}(v)} = Z(u+v) - Z(u-v) - 2Z(v)$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{P}'(u) - \mathcal{P}'(v)}{\mathcal{P}(u) - \mathcal{P}(v)} = Z(u+v) - Z(u) - Z(v).$$