M.M.F.A.I.
Analyse Complexe

Année 2001-02

EXAMEN PARTIEL du 11 avril 2002

Durée : 2h

Exercice 1

Soit f une fonction entière.
1. Soit R un nombre réel > 0. Notons $\mathcal{C}(0, R)$ le cercle de centre 0 et de rayon R. Soit w un nombre complexe tel que $|w| < R$. Démontrer qu'on a

$$f(w) - f(0) = \frac{w}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(0,R)} \frac{f(z)}{z(z-w)} \, dz.$$

2. Supposons que la quantité

$$\int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| \, dt$$

soit bornée lorsque R parcourt les nombres réels > 0. Démontrer que f est une fonction constante.

Exercice 2

1. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $a < b < c$. Démontrer que la fonction $z \mapsto 1/[(z-a)(z-b)(z-c)]$ admet une racine carré holomorphe g sur $\mathbf{C} - [a, b] \cup [c, +\infty[$.
2. Démontrer que les intégrales (au sens réel) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} \, dt$ et $\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} \, dt$ existent. Indiquer (on pourra faire un dessin) un lacet (continu) γ de $\mathbf{C} - [a, b] \cup [c, +\infty[$ tel que

$$\int_\gamma g(z) \, dz = 2 \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} \, dt.$$

3. Démontrer qu'on a

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} \, dt = \int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)}} \, dt.$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ une fonction *analytique*, *i.e.* f est continue, la restriction de f à $\mathbf{C}$ est méromophe, et la fonction $z \mapsto f(1/z)$ est méromorphe au voisinage de 0 (et f n'est pas constamment égale à ∞). Le *résidu de f en ∞* est le résidu en 0 de la fonction $z \mapsto -f(1/z)/z^2$. On note ce résidu $\mathrm{Res}_\infty f$.
1. Démontrer que l'ensemble $f^{-1}(\infty)$ des pôles de f est un ensemble fini.
2. Démontrer qu'il existe une fraction rationnelle $Q \in \mathbf{C}(z)$ telle que la fonction $z \mapsto Q(z)f(z)$ soit sans pôle.
3. Démontrer que f est une fraction rationnelle. En déduire que f est constante ou surjective.
4. Démontrer que toute fraction rationnelle définit une fonction analytique $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.
5. Démontrer que si $f = P/Q$ où P et Q sont des polynômes dont les degrés vérifient $\mathrm{d}^0\, Q - \mathrm{d}^0\, P \geq 2$, on a $\mathrm{Res}_\infty f = 0$.
6. Démontrer qu'on a, pour R nombre réel assez grand,

$$\mathrm{Res}_\infty f = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,R)} f(z)\, dz.$$

7. En déduire la formule

$$\sum_{z \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})} \mathrm{Res}_z f = 0.$$

8. Soit $\mathcal{C}$ un cercle ne contenant aucun pôle de f. Notons A la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} - \mathcal{C}$. Démontrer la formule

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = -2\pi i \sum_{z \in A} \mathrm{Res}_z f.$$

9. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{(z-3)(1+3z)^3(1-3z)^3}.$$