M.M.F.A.I. Année 2001-02
Fonctions analytiques

EXAMEN du 12 juin 2002

Durée : 3 h

Exercice 1

Soit τ un nombre complexe de partie imaginaire > 0. Posons $q = e^{2i\pi\tau}$. Considérons la fonction qui à z associe

$$\theta_\tau(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)i\pi z}$$

1. Démontrer que la fonction θ_τ est bien définie et est une fonction entière.
2. Démontrer qu'on a $\theta_\tau(-z) = -\theta_\tau(z)$, $\theta_\tau(z+1) = -\theta_\tau(z)$ et $\theta_\tau(z+\tau) = -\frac{1}{q}e^{-2i\pi z}\theta_\tau(z)$.
3. En déduire que si n et m sont deux nombres entiers, on a $\theta_\tau(n+m\tau) = 0$.
4. Démontrer qu'il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que les segments $I_1 = [z_0, z_0+\tau]$, $I_2 = [z_0+\tau, z_0+\tau+1]$, $I_3 = [z_0+\tau+1, z_0+1]$ et $I_4 = [z_0+1, z_0]$ ne contiennent pas de zéro de θ_τ. Soient c_1, c_2, c_3 et c_4 des chemins (continus) de $\mathbf{C}$ à supports dans I_1, I_2, I_3 et I_4 respectivement et reliant respectivement z_0 à $z_0+\tau$, $z_0+\tau$ à $z_0+\tau+1$, $z_0+\tau+1$ à z_0+1 et z_0+1 à z_0.
5. Calculer $(\theta'_\tau/\theta_\tau)(z+1) - (\theta'_\tau/\theta_\tau)(z)$ et $(\theta'_\tau/\theta_\tau)(z+\tau) - (\theta'_\tau/\theta_\tau)(z)$.
6. En déduire $\int_{c_1} \theta'_\tau/\theta_\tau(z)\,dz + \int_{c_3} \theta'_\tau/\theta_\tau(z)\,dz$ puis $\int_{c_2} \theta'_\tau/\theta_\tau(z)\,dz + \int_{c_4} \theta'_\tau/\theta_\tau(z)\,dz$.
7. Combien la fonction θ_τ a-t-elle de zéros dans l'intérieur du parallélogramme de sommets z_0, $z_0+\tau$, $z_0+\tau+1$ et z_0+1. Quels sont les zéros de θ_τ ?

Exercice 2

Soit f une fonction continue $[0,+\infty[\to \mathbf{R}$. Pour n entier ≥ 1, on note $I^n(f)$ la primitive n-ième de f qui vaut 0 en 0.
1. Établir l'égalité

$$I^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f(t)\,dt.$$

2. En déduire, pour α nombre complexe de partie réelle > 0, une définition de $I^\alpha(f)$ compatible avec ce qui précède et vérifiant de plus les conditions suivantes. On a $I^\alpha(f)(0) = 0$; l'application $(x,\alpha) \mapsto I^\alpha(f)(x)$ est continue ; pour $x \in [0,+\infty[$ fixé l'application $\alpha \mapsto I^\alpha(f)(x)$ est holomorphe ; pour $\alpha \in \mathbf{C}$ de partie réelle > 1, la fonction $x \mapsto I^\alpha(f)(x)$ est dérivable de dérivée $I^{\alpha-1}(f)(x)$.
3. Soient α et β des nombres complexes de parties réelles > 0. Établir la formule

$$I^{\alpha+\beta}(f) = I^\alpha(I^\beta)(f).$$

(On rappelle la formule $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$.)
4. Démontrer que $I^\alpha(f)(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque α tend vers 0 par valeurs réelles > 0.
5. Supposons f de classe C^∞. Montrer que pour $x \in]0,+\infty[$ et α nombre complexe de partie réelle > 0, on a

$$I^\alpha(f)(x) = I^{\alpha+1}(f')(x) + \frac{f(0)x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto I^\alpha(f)(x)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$. Quelle est la valeur de ce prolongement en $-n$, lorsque n est un entier ≥ 0 ?

Exercice 3

On note $\Re$ et $\Im$ les fonctions partie réelle et partie imaginaire respectivement. On rappelle que la fonction ζ est donnée par le produit eulerien

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

où le produit porte sur les nombres premiers. Pour x nombre réel > 0, on pose

$$\psi(x) = \sum_{p,k,p^k \leq x} \log p$$

et

$$\psi_1(x) = \sum_{p,k,p^k \leq x} (x - p^k) \log p$$

où p parcourt les nombres premiers et où k parcourt les nombres entiers ≥ 1. On rappelle la formule explicite

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\zeta'}{\zeta}(0)x - \frac{\zeta'}{\zeta}(-1) - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{1-2k}}{2k(2k-1)},$$

où ρ parcourt les zéros de ζ de partie réelle dans $[0,1]$. Posons

$$\theta = \mathrm{Sup}\{\Re(\rho)/\rho \in \mathbf{C}, \zeta(\rho) = 0\}.$$

On rappelle le nombre $N(T)$ de zéros de ζ de partie imaginaire dans $]0,T[$ est égal à $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log(T))$ lorsque T tend vers l'infini.

1. Pour s nombre complexe de partie réelle > 1, établir successivement les formules :

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} p^{-ks} \log p = \int_1^{+\infty} t^{-s}\, d\psi(t) = \frac{1}{s-1} + 1 + s\int_1^{+\infty} t^{-s-1}(\psi(t) - t)\, dt,$$

où p parcourt les nombres premiers.

2. En déduire qu'on a

$$\mathrm{Inf}\{\alpha \in \mathbf{R}/\psi(x) = x + O(x^\alpha)\} \geq \theta.$$

3. Démontrer les inégalités, pour $x \geq 2$,

$$\psi_1(x) - \psi_1(x-1) \leq \psi(x) \leq \psi_1(x+1) - \psi_1(x).$$

4. Démontrer qu'on a, pour $x \geq 1$,

$$\psi_1(x+1) - \psi_1(x) = x - \sum_\rho \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O(1)$$

lorsque x tend vers $+\infty$, et où ρ parcourt les zéros de ζ dans la bande critique.

5. Démontrer les inégalités, pour ρ zéro de ζ dans la bande critique et pour $x \geq 1$,

$$\left|\frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right| \leq 5\frac{x^{\theta+1}}{|\Im(\rho)|^2}$$

et

$$\left|\frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right| \leq 2\frac{x^{\theta}}{|\Im(\rho)|}.$$

6. En déduire la relation, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$ et lorsque x tend vers l'infini

$$\sum_\rho \frac{(x+1)^{\rho+1} - x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} = O(x^{\theta+\epsilon}).$$

7. Démontrer que l'hypothèse de Riemann équivaut à la validité, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, de l'estimation asymptotique

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2+\epsilon}),$$

lorsque x tend vers $+\infty$.