M.M.F.A.I.
Analyse Complexe Année 2000-01

EXAMEN PARTIEL du 4 avril 2001

Durée : 2h

On note log la détermination principale du logarithme. Soit γ un chemin de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ d'origine $1/2$ et de but $z \in \mathbf{C}$. On note $\log_\gamma(z)$ le prolongement analytique de log le long de γ. On note $\Re$ et $\Im$ les fonctions partie réelle et partie imaginaire respectivement. Si $F_\gamma(z)$ est un prolongement analytique le long de γ, on appelle dérivée en γ de $F_\gamma(z)$ la dérivée du prolongement analytique en le but de γ. Ainsi la dérivée de $\log_\gamma(z)$ vaut $1/z$.

I

Pour $z \in \mathbf{C}-[1,+\infty[$, $z \neq 0$, on pose

$$f(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

1. Donner le développement en série entière de f au voisinage de 0. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}-[1,+\infty[$ et qu'elle admet un prolongement analytique le long de tout chemin d'origine $1/2$ dans $\mathbf{C}-\{0,1\}$. Existe-t-il un prolongement méromorphe d'un tel prolongement analytique ?
2. On note Li_2 et on appelle *dilogarithme* la primitive de f sur $\mathbf{C}-[1,+\infty[$ qui vaut 0 en 0. Donner le développement en série entière de Li_2 en 0.
3. On rappelle la formule $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Démontrer, pour $z \in \mathbf{C}-]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, la relation

$$Li_2(1-z) = -Li_2(z) + \pi^2/6 - \log(z)\log(1-z)$$

et, pour $z \in \mathbf{C}$, $\Im(z) > 0$, la relation $-\log(1-z) + \log(1-1/z) + \log(z) - \pi i = 0$, dont on déduira

$$Li_2(z) + Li_2(1/z) = -\frac{1}{2}(\log(z))^2 + \pi i \log(z) + \frac{\pi^2}{3}.$$

II

Notons $1-\gamma$ le chemin $t \mapsto 1-\gamma(t)$. Soient γ_0 et γ_1 les lacets de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ donnés par $t \mapsto e^{2i\pi t}/2$ et $t \mapsto 1-e^{2i\pi t}/2$. On rappelle que le groupe $\pi_1(\mathbf{C}-\{0,1\},1/2)$ est engendré par les classes d'homotopie de γ_0 et γ_1.

1. Soient U_1, $U_2 ... U_n$ des ouverts connexes de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ associés au prolongement analytique de f le long de γ et f_1, $f_2 ... f_n$ les fonctions correspondantes holomorphes sur U_1, $U_2 ... U_n$ respectivement. Soient γ_1, $\gamma_2 ... \gamma_n$ des chemins de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ à valeurs dans U_1, $U_2 ... U_n$ respectivement et tels que γ soit homotope à $\gamma_1.\gamma_2.....\gamma_n$. Démontrer que l'expression $Li_{2,\gamma}(z) = Li_2(1/2) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f_i(u)\,du$ fournit un prolongement analytique de Li_2 le long de γ. Quelle est la dérivée en γ de $Li_{2,\gamma}(z)$?
2. Établir les relations $\log_{\gamma_0.\gamma}(z) = \log_\gamma(z) + 2\pi i$ et $\log_{\gamma_1.\gamma}(z) = \log_\gamma(z)$. En déduire les relations $Li_{2,\gamma_0.\gamma}(z) = Li_{2,\gamma}(z)$ et $Li_{2,\gamma_1.\gamma}(z) = Li_{2,\gamma}(z) - 2\pi i \log_\gamma(z)$.

III

Posons

$$D_\gamma(z) = \Im(Li_{2,\gamma}(z) + \log|z| \, \log_{1-\gamma}(1-z)).$$

1. Soit δ un chemin de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ strictement homotope à γ. Démontrer qu'on a $D_\gamma(z) = D_\delta(z)$.
2. Établir les relations $D_{\gamma_0.\gamma}(z) = D_\gamma(z)$ et $D_{\gamma_1.\gamma}(z) = D_\gamma(z)$. En déduire que $D_\gamma(z) = D(z)$ dépend de z mais pas du choix de γ. C'est la *fonction de Bloch-Wigner*.
3. Démontrer que D est continue sur $\mathbf{C}-\{0,1\}$. Établir les relations $D(1-z) = -D(z)$ et $D(1/z) = -D(z)$ ($z \in \mathbf{C}-\{0,1\}$) ; ce sont les relations de *réflection* et d'*inversion*. En déduire que D se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.