M.M.F.A.I.
Analyse complexe — Année 2000-01

Corrigé de l'EXAMEN PARTIEL du 4 avril 2001

I

1. On a le développement en série entière $\log(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n/n$. On en déduit le développement

$$-\frac{\log(1-z)}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}/n.$$

La fonction $z \mapsto \log(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - [1,+\infty[$ avec un unique zéro simple en 0, si bien que f se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - [1,+\infty[$. La fonction $z \mapsto \log(1-z)$ admet un prolongement analytique le long de tout chemin de $\mathbf{C} - \{1\}$. La fonction $z \mapsto 1/z$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$ et holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$. C'est pourquoi f admet un prolongement analytique le long de tout chemin de $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Ce prolongement analytique admet un prolongement méromorphe en 0, mais pas en 1 puisque la fonction log (ainsi que tous ses prolongements analytiques) n'admet pas de prolongement méromorphe en 0.
2. L'existence et l'unicité de Li_2 résultent du fait que $\mathbf{C}-[1,+\infty[$ est simplement connexe. Le développement en série entière de Li_2 s'obtient, au terme constant près (qui est nul puisque $Li_2(0) = 0$) en intégrant le développement en série entière de f. On a donc, au voisinage de 0,

$$Li_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2.$$

3. La fonction $z \mapsto Li_2(1-z) + Li_2(z) + \log(z)\log(1-z)$ est définie sur $\mathbf{C} -]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$, est de dérivée nulle et tend vers $\pi^2/6$, lorsque z tend vers 0, car $\sum_{n=1}^{\infty}(1-z)^n/n^2$ tend vers $\pi^2/6$ lorsque z tend vers 0.

Considérons $\alpha : z \mapsto Li_2(z) + Li_2(1/z) + \frac{1}{2}(\log(z))^2 - \pi i \log(z)$, qui est holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$. On a $\alpha'(z) = -\log(1-z)/z + \log(1-1/z)/z + \log(z)/z - \pi i/z = \beta(z)/z$. Démontrons que $\beta(z) = 0$. On a

$$e^{\beta(z)} = \frac{1}{(1-z)}\frac{z-1}{z}z(-1) = 1.$$

On a donc $\beta(z) \in 2i\pi\mathbf{Z}$. Par ailleurs si $\Im(z) > 0$, on a $\Im(\log(1-z)) \in]-i\pi, 0[$, $\Im(\log(1-1/z)) \in]0, i\pi[$ et $\Im(\log(z)) \in]0, i\pi[$. Cela entraîne $\beta(z) = 0$. La fonction α est donc constante. On a $Li_2(z) + Li_2(1/z)$ tend vers $\pi^2/6 + \pi^2/6 = \pi^2/3$ lorsque z tend vers 1. C'est pourquoi $\alpha(z)$ tend vers $\pi^2/3$ lorsque z tend vers 1.

II

1. Quitte à augmenter n on peut supposer que U_i est une boule ouverte pour tout i. Notons g_i la primitive de f_i sur U_i qui coïncide avec g_{i-1} sur $U_i \cap U_{i-1}$ ($i \geq 2$) et avec Li_2 sur U_1. On a $Li_{2,\gamma}(z) = g_n(z)$ et $g_1 = Li_2$. On a donc bien un prolongement analytique.

La dérivée en γ de $Li_{2,\gamma}(z)$ est $g_n'(z) = f_n(z)$, c'est-à-dire la valeur en le but de γ du prolongement analytique de f le long de γ, c'est-à-dire encore $-\log_{1-\gamma}(1-z)/z$.
2. Observons que les dérivées des membres des deux premières égalités coïncident. Il suffit donc d'établir la formule pour le chemin constant γ égal à 1/2. On a bien $\log_{\gamma_1}(1/2) = \log(1/2)$ et $\log_{\gamma_0}(1/2) = \log(1/2) + 2\pi i$.

Pour établir les deux dernières égalités, considérons les fonctions $z \mapsto h_{0,\gamma}(z) = Li_{2,\gamma_0.\gamma}(z) - Li_{2,\gamma}(z)$ et $z \mapsto h_{1,\gamma}(z) = Li_{2,\gamma_1.\gamma}(z) - Li_{2,\gamma}(z) + 2\pi i \log_\gamma(z)$ dont les dérivées en γ valent $-\frac{\log_{1-\gamma_0.\gamma}(1-z)}{z} + \frac{\log_{1-\gamma}(1-z)}{z}$ et $-\frac{\log_{1-\gamma_1.\gamma}(1-z)}{z} + \frac{\log_{1-\gamma}(1-z)}{z} + \frac{2\pi i}{z}$, c'est-à-dire 0 d'après les deux premières égalités. Vérifions que les égalités sont vérifiées pour le chemin constant égal à 1/2. On a $Li_{2,\gamma_0}(1/2) = Li_2(1/2)$ puisque Li_2 est holomorphe sur $\mathbf{C} - [1,+\infty[$, qui est simplement connexe et qui contient l'image de γ_0.

Remarquons que la dérivée de $Li_{2,\gamma}(z) + \log_\gamma(z)\log_{1-\gamma}(1-z)$ vaut $\log_\gamma(z)/(1-z)$. Or la fonction $z \mapsto \log(z)/(1-z)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}-]-\infty,0]$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbf{C}-]-\infty,0]$. On a donc $Li_{2,\gamma_1}(1/2) + \log_{\gamma_1}(1/2)\log_{\gamma_0}(1/2) = Li_2(1/2) + \log(1/2)\log(1/2)$, cela entraîne la nullité de $h_{1,\gamma}(1/2)$.

III

1. Comme les fonctions Li_2 et log admettent des prolongement analytiques sur $\mathbf{C}-\{0,1\}$, on a, par invariance par homotopie du prolongement analytique, $Li_{2,\gamma}(z) = Li_{2,\delta}(z)$ et $\log_\gamma(z) = \log_\delta(z)$. Cela entraîne $D_\gamma(z) = D_\delta(z)$.
2. On a $D_{\gamma_0.\gamma}(z) = \Im(Li_{2,\gamma_0.\gamma}(z) + \log|z|\log_{1-\gamma_0.\gamma}(z))$ Or on a, d'après **II**.2, $Li_{2,\gamma_0.\gamma}(z) = Li_{2,\gamma}(z)$ et $\log_{1-\gamma_0.\gamma}(1-z) = \log_{(1-\gamma_0).(1-\gamma)}(1-z) = \log_{\gamma_1.(1-\gamma)}(1-z) = \log_{1-\gamma}(1-z)$, d'où la formule $D_{\gamma_0.\gamma}(z) = D_\gamma(z)$.

On a $D_{\gamma_1.\gamma}(z) = \Im(Li_{2,\gamma_1.\gamma}(z) + \log|z|\log_{1-\gamma_0.\gamma}(1-z))$. On a, d'après **II**.2, $Li_{2,\gamma_1.\gamma}(z) = Li_{2,\gamma}(z) - 2\pi i\log_\gamma(z)$ et $\log_{1-\gamma_1.\gamma}(1-z) = \log_{\gamma_0.(1-\gamma)}(1-z) = 2\pi i + \log_{1-\gamma}(1-z)$. On a donc $D_{\gamma_1.\gamma}(z) = \Im(Li_{2,\gamma}(z) + \log|z|\log_{1-\gamma}(1-z)) + \Im(-2\pi i\log_\gamma(z) + 2\pi i\log|z|)$; comme $-\log_\gamma(z) + \log|z| \in i\mathbf{R}$, on a $\Im(-2\pi i\log_\gamma(z) + 2\pi i\log|z|) = 0$ et on obtient la formule $D_{\gamma_1.\gamma}(z) = D_\gamma(z)$. On a de même $D_{\bar\gamma_1.\gamma}(z) = D_{\bar\gamma_0.\gamma}(z) = D_\gamma(z)$.

Soit δ un chemin continu de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ d'origine $1/2$ et de but z. On a $D_\delta(z) = D_{\delta.\bar\gamma.\gamma}$. Le lacet $\delta.\bar\gamma$ est homotope à un produit de facteurs égaux à γ_0, $\bar\gamma_0$, γ_1 ou $\bar\gamma_1$, puisque les classes de γ_0 et γ_1 engendrent le groupe $\pi_1(\mathbf{C}-\{0,1\},1/2)$. On a donc, en raison de l'invariance par homotopie et des formules qui précèdent $D_\delta(z) = D_{\delta.\bar\gamma.\gamma} = D_\gamma(z)$.
3. Les fonctions $Li_{2,\gamma}$ et $\log_\gamma(z)$ sont analytiques et donc continues en z. La fonction D est donc continue sur $\mathbf{C}-\{0,1\}$ puisque c'est la partie imaginaire d'une fonction continue.

On a d'après **I**.3, pour $z \in \mathbf{C}-]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$,

$$D(z) + D(1-z) = \Im(Li_2(1-z) + Li_2(z) + \log|z|\log(1-z) + \log(z)\log|1-z|).$$

Or on a $\log|z|\log(1-z) + \log(z)\log|1-z| = \log(z)\log(1-z) + \Re(\log(z)\log(1-z))$ et $Li_2(1-z) + Li_2(z) = \pi^2/6 - \log(z)\log(1-z)$. Cela entraîne $D(z) + D(1-z) = 0$. Comme D est continue et comme $\mathbf{C}-]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$ est dense dans $\mathbf{C}-\{0,1\}$, la formule $-D(z) = D(1-z)$ vaut pour $z \in \mathbf{C}-\{0,1\}$.

Il suffit de démontrer la relation $D(z) = -D(1/z)$ pour $z \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ puisque $\mathbf{C}-\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{C}-\{0,1\}$ et D est continue. Quitte à échanger z et $1/z$, on peut supposer que $\Im(z) > 0$. On a $D(z)+D(1/z) = \Im(g(z))$ avec $g(z) = Li_2(z) + \log|z|\ \log(1-z) + Li_2(1/z) + \log|1/z|\ \log(1-1/z)$. D'après **I**.3, on a

$$g(z) = -\frac{1}{2}(\log(z))^2 + \pi i\log(z) + \frac{\pi^2}{3} + \log|z|\ \log(1-z) + \log|1/z|\ \log(1-1/z).$$

Or on a $-\log(1-z) + \log(1-1/z) = \pi i - \log(z)$ (voir **I**.3) et donc

$$g(z) = -\frac{1}{2}(\log(z))^2 + \pi i\log(z) + \frac{\pi^2}{3} - \pi i\log|z| + \log(z)\log|z|.$$

Comme $\log(z) - \log|z| \in i\mathbf{R}$, on a

$$\Im(g(z)) = \Im(\log(\bar z)\log(z)) = 0.$$

Pour montrer que D se prolonge par continuité sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, il suffit de montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 et d'appliquer les formules de réflection et d'inversion, puisque les fonctions $z \mapsto 1-z$ et $z \mapsto 1/z$ se prolongent en des fonctions continues de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui sont des homéomorphismes au voisinage de 0. Pour $z \in \mathbf{C}$, $Li_2(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers 0, par définition de Li_2. Par ailleurs $\log|z|\ \log(1-z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers 0 dans $\mathbf{C}-]-\infty,0]$. D'où le prolongement par continuité sur $\mathbf{C}-]-\infty,0[$, puis, par continuité de D sur $\mathbf{C}-\{0,1\}$, sur $\mathbf{C}-\{1\}$.

Remarques : – Le dilogarithme a été mentionné par Leibniz en 1696. On s'intéresse de nos jours aux fonctions *polylogarithmes* qui sont les prolongements analytiques sur des chemins de $\mathbf{C}-\{0,1\}$ de la fonction analytique sur $\mathbf{C}-]1,+\infty[$ dont le développement en 0 est donné par $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n^k$, pour k entier ≥ 1.

– La fonction D satisfait une autre équation fonctionnelle remarquable. On a :

$$D(\frac{x}{1-y}\frac{y}{1-x}) = D(\frac{y}{1-x}) + D(\frac{x}{1-y}) - D(x) - D(y)$$

$((x,y) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})^2 - \{(0,1),(1,0),(\infty,\infty)\})$.