M.M.F.A.I. Année 2000-01
Fonctions analytiques

EXAMEN du 6 juin 2001

Durée : 3 h

I

Soit ξ une fonction entière d'ordre < 2 telle que $\xi(0) > 0$. Notons ξ^* la fonction qui à s associe $\overline{\xi(\bar{s})}$. Soit w un nombre complexe de module 1. Supposons qu'on ait, pour tout nombre complexe s,

$$\xi(1-s) = w\xi^*(s).$$

Pour $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, on pose, en faisant parcourir à ρ les zéros de ξ comptés avec multiplicités,

$$\prod_\rho f(\rho) = \lim_{T\to\infty} \prod_{|\rho|<T} f(\rho) \qquad \text{et} \qquad \sum_\rho f(\rho) = \lim_{T\to\infty} \sum_{|\rho|<T} f(\rho).$$

Notons log la détermination principale du logarithme. Posons le développement de Taylor en 0

$$\log(\xi(\frac{t}{t-1})) = \log(\xi(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n}.$$

1. Démontrer que la fonction $\xi\xi^*$ est d'ordre < 2.
2. Démontrer qu'on a le produit de Weierstrass

$$\xi(s)\xi^*(s) = \xi(0)\xi^*(0) \prod_\rho (1 - s/\rho)(1 - s/(1-\rho)).$$

3. En posant $s = t/(t-1)$ et $u_\rho = \rho/(\rho - 1)$, en déduire qu'on a, au voisinage de 0,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \overline{a_n}) t^n/n = \sum_\rho \log(\frac{(1-u_\rho t)(1-t/u_\rho)}{(1-t)^2}).$$

4. En déduire qu'on a

$$a_n + \overline{a_n} = \sum_\rho (2 - u_\rho^n - u_\rho^{-n}).$$

5. Démontrer que si tous les zéros de ξ sont de partie réelle dans $[0,1]$, on a $a_1 + \overline{a_1} \geq 0$.
6. Démontrer que si les zéros de ξ sont de partie réelle 1/2, on a $a_n + \overline{a_n} \geq 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
7. Supposons que $a_n + \overline{a_n} \geq 0$ (n entier ≥ 0). Soit r le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \bar{a}_n) t^n/n$. Montrer que si $r < 1$, on a $(\xi\xi^*)(t/(t-1)) \geq (\xi\xi^*)(0)$ ($t \in [0, r[$). En déduire que $r \geq 1$, puis que tous les zéros de ξ sont de partie réelle 1/2.

II

On reprend les notations de la partie **I**. Considérons les fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann. On pose

$$\xi(s) = s(s-1)\Lambda(s) = s(s-1)\Gamma(s/2)\zeta(s)\pi^{-s/2}.$$

On suppose dans cette partie que l'hypothèse de Riemann est vérifiée, *i.e.* les seuls zéros de ξ sont de partie réelle $1/2$. On note $N(T)$ le nombre de ces zéros de partie imaginaire dans $[0,T]$. On rappelle que le nombre de ces zéros diffère de $\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e}$ de $O(\log T)$. On rappelle les formules

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \log N \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s}s\prod_{n=1}^{\infty}[(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}].$$

1. Soient a et b des nombres complexes de parties réelles > 0 et s un nombre complexe de partie réelle > -1. Démontrer qu'on a

$$\int_0^\infty (e^{-au} - e^{-bu})u^{s-1}\,du = (a^{-s} - b^{-s})\Gamma(s).$$

Calculer le développement de Taylor à l'ordre 1 en $s = 0$ de $s \mapsto (a^{-s} - b^{-s})\Gamma(s)$. En posant $a = \epsilon - i$ et $b = \epsilon + i$, et en faisant tendre ϵ vers 0, en déduire les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\log u\,du = -\gamma\frac{\pi}{2}.$$

2. En posant $\theta(t) = 2\mathrm{Arctg}(\frac{1}{2t})$, démontrer successivement les formules

$$a_n + \bar{a}_n = 4\int_0^\infty (1-\cos(n\theta(t))\,dN(t) = 4n\int_0^\pi \sin(n\theta)N(\frac{1}{2\mathrm{tg}(\theta/2)})d\theta.$$

3. En déduire l'estimation (Rappel : pour f $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$, on a $\int_a^b \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta = O(1/n)$)

$$a_n + \bar{a}_n = 2n\int_0^\pi \sin(n\theta)\frac{1}{\pi\theta}\log\frac{1}{2\pi e\theta}d\theta + o(n).$$

4. En déduire qu'on a

$$a_n + \bar{a}_n = n(\log n + \gamma - 1 - \log 2\pi) + o(n).$$

III

On reprend les notations de la partie **II**. On ne fait plus aucun usage de l'hypothèse de Riemann.

1. Démontrer qu'on a

$$a_n = -\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}[(s+1)^n\frac{\xi'}{\xi}(-s)]_{s=0}.$$

2. Démontrer la formule

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = -\gamma - \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{s+n}).$$

3. Démontrer qu'on a

$$-\frac{\xi'}{\xi}(-s) = \frac{1}{1+s} + \frac{\log\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-1}\zeta(n+1)s^n - \frac{\zeta'}{\zeta}(-s).$$

4. Posons

$$\zeta(-s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n.$$

Donner une formule pour a_n en fonction de la suite $(c_n)_{n\geq 1}$, qui est définie par le développement de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}s^n = -\frac{\zeta'}{\zeta}(-s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}s^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n s^n}.$$

5. Démontrer qu'on a

$$b_n = \frac{1}{n!}\lim_{N\to\infty}(\sum_{k=1}^{N}(\log\, k)^n - \int_0^N (\log\, x)^n\,dx - \frac{1}{2}(\log\, N)^n).$$