M.M.F.A.I.
Analyse complexe   Année 2000-01

Esquisse de corrigé de l'EXAMEN du 6 juin 2001

I

1. On a $\mathrm{Sup}_{s\in B(0,r)}||\log\log\xi(s)\xi^*(s)|| \leq \mathrm{Sup}_{s\in B(0,r)}||\log\log\xi(s)+\log 2||$, d'où le résultat.
2. Comme ξ est d'ordre <2, elle admet un produit de Weierstrass de la forme

$$\xi(s) = e^{P(s)}\prod_\rho (1-s/\rho)e^{-s/\rho},$$

où P est un polynôme de degré <2, que l'on peut donc écrire $P(s) = as+b$. On a donc, en utilisant l'équation fonctionnelle,

$$(\xi\xi^*)(s) = \bar{w}e^{a+2b}\prod_\rho (1-s/\rho)e^{-1/\rho}(1-(1-s)/\rho).$$

En raison de l'équation fonctionnelle, les zéros de ξ avec leur multiplicité sont inchangé par $s\mapsto 1-s$. On a donc $2\sum_\rho 1/\rho = \sum_\rho 1/\rho + 1/(1-\rho) = \sum_\rho 1/\rho(1-\rho)$, qui converge puisque ξ est d'ordre <2.

Par ailleurs, on a $(1-(1-s)/\rho) = (\rho-1)/\rho)(1-s/(1-\rho)$. Le produit $\prod_\rho(\rho-1)/\rho$ converge (encore en raison de l'invariance par $s\mapsto 1-s$ des zéros de ξ). Il existe donc une constante non nulle $c\in\mathbf{C}$ telle que

$$(\xi\xi^*)(s) = c\prod_\rho (1-s/\rho)(1-s/(1-\rho)).$$

On a évidemment $c = (\xi\xi^*)(0)$.
3. On a, en utilisant la question **I**.2

$$\xi(t/(t-1))\xi^*(t/(t-1)) = (\xi\xi^*)(0)\prod_\rho (1-t/((t-1)\rho))(1-t/((t-1)(1-\rho))).$$

Or on a
$$(1-t/((t-1)\rho))(1-t/((t-1)(1-\rho))) = (1-u_\rho t)(1-t/u_\rho).$$

Comme on a le développement de Taylor en 0

$$\log(\xi^*(\frac{t}{t-1})) = \log(\xi^*(0)) + \sum_{n=1}^{+\infty}\bar{a}_n\frac{t^n}{n},$$

on obtient la formule cherchée en passant au logarithme du produit de Weierstrass.
4. On déduit du développement de Taylor en 0 de $\log(1-t)$ la formule

$$\log(\frac{(1-u_\rho t)(1-t/u_\rho)}{(1-t)^2}) = 2\sum_{n=1}^\infty t^n/n - \sum_{n=1}^\infty u_\rho^n t^n/n - \sum_{n=1}^\infty u_\rho^{-n}t^n/n.$$

D'où la formule cherchée par identification des développements de Taylor.
5. On a, d'après la question **I**.4, $2\Re(a_1) = \sum_\rho(2-\rho/(\rho-1)-(\rho-1)/\rho)$. Or on a $2-\rho/(\rho-1)-(\rho-1)/\rho = -1/\rho(\rho-1)$. Si $\Re(\rho)\in[0,1]$, on a $\Re(-1/\rho(\rho-1)\geq 0$, d'où le résultat.
6. Observons qu'on a $\Re(\rho) = 1/2$ si et seulement si $|u_\rho| = 1$. Dans ce cas on a $\Re(2-u_\rho^n-u_\rho^{-n})\geq 0$.
7. La fonction $s\mapsto\xi(s)\xi^*(s)$ est à valeurs réelles lorsque s est réel. De plus la fonction $t\mapsto\xi\xi^*(t/(t-1))$ est bien définie sur $[0,r[$ lorsque $r<1$. Comme $\Re(a_n)\geq 0$ (n entier ≥ 0), la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\overline{a_n})t^n/n$ est croissante lorsque $t\in[0,r[$, d'où l'inégalité cherchée par passage à l'exponentielle. Cette série ne peut être

prolongée en une fonction holomorphe au voisinage de r. C'est pourquoi, si $r < 1$, $r/(r-1)$ est un zéro de $\xi\xi^*$. Mais cela contredit l'inégalité qui vient d'être démontrée. On a donc $r \geq 1$.

La fonction $\xi\xi^*$ ne s'annule donc pas dans l'image du disque unité ouvert par $t \mapsto t/(t-1)$, qui n'est autre que $\{s \in \mathbf{C}/\Re(s) < 1/2\}$. Elle ne s'annule pas non plus dans $\{s \in \mathbf{C}/\Re(s) > 1/2\}$, en raison de l'équation fonctionelle.

II

1. La formule résulte de $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}\,du$ et d'un changement de variables.

On a $\Gamma(s) = 1/s - \gamma + o(1)$ et $a^{-s} - b^{-s} = s(\log b - \log a) + s^2((\log b)^2 - (\log a)^2)/2 + o(s^2)$, au voisinage de $s = 0$, d'où la formule

$$\int_0^\infty (e^{-au} - e^{-bu})u^{s-1}\,du = \log b - \log a - \gamma s(\log b - \log a) + s((\log b)^2 - (\log a)^2)/2 + o(s).$$

La valeur en 0 et la dérivée en 0 du membre de gauche tendent vers $2\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ et $2\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\log u\,du$ respectivement lorsque $a = \epsilon - i$ et $b = \epsilon + i$ et ϵ tend vers 0. Ils tendent alors vers π et $-\gamma\pi$ respectivement dans le membre de droite.

2. Posons $\rho = 1/2 + it$. Comme u_ρ est de module 1, on peut poser $u_\rho = e^{-i\theta(t)}$ avec $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$. Cela se traduit par l'égalité $\theta(t) = 2\mathrm{Arctg}(\frac{1}{2t})$. On a alors, en exploitant la symétrie $s \mapsto 1-s$ sur les zéros de ξ,

$$a_n + \bar{a}_n = 2\sum_\rho 1 - \cos(n\theta(t)) = 4\int_0^\infty (1 - \cos(n\theta(t))\,dN(t).$$

Intégrons par partie l'expression précédente :

$$a_n + \bar{a}_n = 4[(1 - \cos(n\theta(t))N(t)]_0^\infty + 4n\int_0^\infty \sin(n\theta(t))N(t)\frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2}.$$

Lorsque $t \to \infty$, la quantité $(1 - \cos(n\theta(t))$ est équivalente à $n^2/2t^2$. On a donc $[(1 - \cos(n\theta(t))N(t)]_0^\infty = 0$ en raison de l'estimée asymptotique de $N(t)$. Posons $\theta = \theta(t)$. On obtient

$$4n\int_0^\infty \sin(n\theta(t))N(t)\frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} = 4n\int_0^\pi \sin(n\theta)N(\frac{1}{2\mathrm{tg}(\theta/2)})d\theta.$$

3. Utilisons l'estimée asymptotique de $N(t)$. On a $N(\frac{1}{2\mathrm{tg}(\theta/2)}) = \frac{1}{\pi\theta}\log\frac{1}{2\pi e\theta} + f(\theta)$, où $f(\theta) = O(\log\theta)$ au voisinage de 0, et f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[\epsilon, \pi]$ pour tout $\epsilon > 0$. On a donc

$$2\int_0^\pi \sin(n\theta)N(\frac{1}{2\mathrm{tg}(\theta/2)})d\theta = \int_0^\pi \sin(n\theta)\frac{1}{\pi\theta}\log\frac{1}{2\pi e\theta}d\theta + \int_0^\epsilon \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta + \int_\epsilon^\pi \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta.$$

Or, on a, en majorant $\sin(n\theta)$ par 1 et $f(\theta)$ par $A|\log\theta|$ (pour A réel > 0 bien choisi), $|\int_0^\epsilon \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta| \leq A|\epsilon\log\epsilon - \epsilon|$ d'une part et $\int_\epsilon^\pi \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta = o(1)$ d'autre part puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[\epsilon, \pi]$. C'est pourquoi $\int_0^\pi \sin(n\theta)f(\theta)\,d\theta$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On a alors

$$2n\int_0^\pi \sin(n\theta)\frac{1}{\pi\theta}\log\frac{1}{2\pi e\theta}d\theta = \frac{2n}{\pi}\int_0^{n\pi}\frac{\sin\theta}{\theta}\log\frac{n}{2\pi e\theta}d\theta.$$

L'intégration par parties permet d'établir $\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}d\theta = O(1/n)$ et $\int_{n\pi}^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\log\theta d\theta = o(1)$. Cela donne

$$a_n + \bar{a}_n = \frac{2n}{\pi}(\log n - \log(2\pi) - 1)\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}d\theta - \frac{2n}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta\log\theta}{\theta}d\theta + no(1).$$

On conclut en utilisant les intégrales calculées en **II**.1.

III

1. Par définition a_n est le résidu en 0 de $nt^{-(n+1)}\log\xi(\frac{t}{t-1})$. Le changement de variable $t=s/(s+1)$ permet de voir a_n comme le résidu en 0 de $ns^{-(n+1)}(s+1)^{n-1}\log\xi(-s)ds$, c'est-à-dire encore le résidu en $s=0$ de $-(s+1)^n s^{-n}\xi'(-s)/\xi(-s)$. D'où la formule cherchée.
2. C'est la dérivée logarithmique du produit de Weierstrass pour $1/\Gamma(s)$ (on a bien la convergence uniforme sur tout compact).
3. C'est la dérivée logarithmique de ξ. Il faut vérifier que

$$\psi(-s)+1/s=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta(n+1)s^n.$$

Cela résulte de la formule

$$\frac{d^k}{ds^k}(\psi(-s)+1/s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!(-1)^k}{(n+s)^k},$$

pour $k>1$, calculée en $s=0$.
4. Il suffit de remplacer, dans la formule établie en **III**.1, $\xi'(-s)/\xi(-s)$ par la formule trouvée en **III**.3. On a alors

$$a_n=1+n\log\pi/2+n\gamma/2+\sum_{j=2}^{n}2^{-j}\zeta(j)C_n^j+\sum_{j=1}^{n}c_jC_n^j.$$

5. En notant [.] la fonction partie entière, on a, pour s nombre complexe de partie réelle >1,

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}-s\int_1^{\infty}\frac{u-[u]-1/2}{u^{s+1}}\,du.$$

Soit N un entier >0. On a

$$-s\int_1^N\frac{u-[u]-1/2}{u^{s+1}}\,du=\sum_{n=1}^{N-1}-s\int_0^1\frac{v-1/2}{(v+n)^{s+1}}\,dv=\sum_{n=1}^{N-1}([(v+n)^{-s}(v-1/2)]_0^1-\int_0^1\frac{dv}{(v+n)^s}).$$

Comme $\sum_{n=1}^{N-1}s[(v+n)^{-s}(v-1/2)]_0^1=-N^{-s}/2+\sum_{n=1}^{N}n^{-s}-1/2$, on a

$$\zeta(s)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{s-1}+N^{-s}/2+\sum_{n=1}^{N}n^{-s}-\int_0^N\frac{du}{u^s}.$$

La convergence de la suite étant uniforme sur tout compact, on a pour $\Re(s)<0$,

$$\zeta^k(-s)=\lim_{N\to\infty}\frac{k!}{(-s-1)^{k+1}}+(\log N)^kN^s/2+\sum_{n=1}^{N}(\log n)^kn^s-\int_0^N\frac{(\log u)^k\,du}{u^s}.$$

En faisant tendre s vers 0, on trouve l'expression cherchée.