U2LG35 L3 Algèbre 2014-2015 **Université Paris-Diderot**

Interrogation écrite numéro 3

Aucun document autorisé

Nom : ____________________ Prénom : ____________________

Les réponses doivent obligatoirement être écrites dans les cadres.

☞ **Exercice 1.** Donner la définition d'un idéal, d'un idéal principal, d'un idéal premier et d'un idéal maximal d'un anneau commutatif $\mathscr{A}$.

- Un idéal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{A}$ est un sous-groupe (additif) de $\mathscr{A}$ tel que $\forall_{a\in\mathscr{A}}\ \forall_{i\in\mathscr{I}}\ ai \in \mathscr{I}$.
- L'idéal $\mathscr{I}$ est principal s'il est de le forme $a\mathscr{A}$, c'est-à-dire s'il est l'ensemble des multiples d'un élément $a \in \mathscr{A}$.
- L'idéal $\mathscr{I}$ est premier si $\forall_{a\in\mathscr{A}}\ \forall_{b\in\mathscr{A}}\ ab \in \mathscr{I} \Rightarrow a \in \mathscr{I} \vee b \in \mathscr{I}$.
- L'idéal $\mathscr{I}$ est maximal si $\mathscr{I} \neq \mathscr{A}$ et si pour tout idéal $\mathscr{J}$ tel que $\mathscr{I} \subset \mathscr{J} \subset \mathscr{A}$, on a $\mathscr{J} = \mathscr{I}$ ou $\mathscr{J} = \mathscr{A}$.

☞ **Exercice 2.** Montrer que bien que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne soit pas un anneau principal (parce que non intègre en général), tous ses idéaux sont néanmoins principaux. (Utiliser la projection canonique $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.)

Soit $\mathscr{I}$ un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'image réciproque de $\mathscr{I}$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc de la forme $k\mathbb{Z}$, et comme π est surjectif, $\mathscr{I}$ est l'image directe de son image réciproque, et est donc engendré par la classe de k modulo n.

Suite au verso $\longrightarrow$

☞ **Exercice 3.** Déterminer les éléments inversibles et tous les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont les classes des entiers premiers à 12. Ce sont donc les éléments $1, 5, 7, 11 \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (autrement-dit ± 1 et ± 5). Par ailleurs, tout idéal de $\mathbb{Z}/12/Z$ est principal et deux éléments a et b engendrent le même idéal si et seulement si ils sont associés (c'est-à-dire si b est le produit de a par un inversible). Ainsi :

- $1, 5, 7$ et 11 engendrent l'idéal $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,
- 2 et 10 engendrent l'idéal $2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$,
- 3 et 9 engendrent l'idéal $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 3, 6, 9\}$,
- 4 et 8 engendrent l'idéal $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 4, 8\}$,
- 6 engendre l'idéal $6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 6\}$,
- 0 engendre l'idéal nul $\{0\}$.