U2LG35 L3 Algèbre 2014-2015 **Université Paris-Diderot**

Interrogation écrite numéro 2

Aucun document autorisé

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Les réponses doivent obligatoirement être écrites dans les cadres.

☞ **Exercice 1.** Donner la définition de la notion de « p-groupe ».

Un p-groupe, où p est un nombre premier, est un groupe dont tout élément a pour ordre une puissance de p.

☞ **Exercice 2.** Soient n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. On pose $X = \{1, \ldots, n\}$ et soit A une partie de X. Montrer que $G = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(A) \subset A\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. Quel est son cardinal ? En déduire que $\mathfrak{S}_n$ a un sous-groupe d'indice C_n^p.

G contient la permutation identité, est stable par composition et par inversion, car $\sigma(A) \subset A$ entraîne $\sigma(A) = A$, puis $\sigma^{-1}(A) = A$. C'est donc un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. Par ailleurs, la condition $\sigma(A) = A$ entraîne $\sigma(X - A) = X - A$. Un élément de G est donc composé d'une permutation de A et d'une permutation de $X - A$ et le cardinal de G est donc $p!(n-p)!$, où p est le cardinal de A. L'indice de G est donc $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.

☞ **Exercice 3.** Soit G un groupe à 253 éléments. Montrer que G a un sous-groupe distingué distinct de $\{1\}$ et de G.

La décomposition de 253 en facteurs premiers est $253 = 11 \times 23$. Le nombre de 23-Sylow de G doit diviser 11 et être congru à 1 modulo 23. Il ne peut donc être que 1, ce qui signifie que G a un unique sous-groupe à 23 éléments, qui est donc nécessairement égal à tous ses conjugués, c'est-à-dire distingué.