Université Paris 7-Denis Diderot
Maîtrise de mathématiques et informatique

Algèbre
Année 2003-04
P. Perrin, L. Merel

EXAMEN du 17 juin 2004

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

I

Soit G un 2-groupe non trivial. On se propose de montrer par récurrence sur l'ordre de G que G possède un sous-groupe d'indice 2. Notons Z le centre de G.
1. Pour $x \in G$ notons $G_x = \{g \in G / gxg^{-1} = x\}$ le centralisateur de x dans G. Montrer que $G_x = G$ si et seulement si $x \in Z$. Montrer que l'ensemble quotient G/G_x possède un nombre pair d'éléments si et seulement si $x \notin Z$.
2. Rappeler la formule des classes. En déduire que Z est d'ordre pair.
3. Montrer que Z possède un élément a d'ordre 2.
4. Notons A le sous-groupe de G engendré par a. Montrer que A est distingué dans G.
5. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, montrer que G/A possède un sous-groupe H d'indice 2.
6. Considérons l'homomorphisme canonique $\phi : G \to G/A$. Montrer que $\phi^{-1}(H)$ est un sous-groupe d'indice 2 de G.

II

On se propose de montrer que le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos. On admettra que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède un zéro dans $\mathbf{R}$.
1. Montrer que si toute extension finie de $\mathbf{C}$ est égale à $\mathbf{C}$, le corps $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.
2. Montrer que tout nombre complexe possède une racine carrée. En déduire que tout polynôme de degré 2 admet une racine dans $\mathbf{C}$, puis que $\mathbf{C}$ ne possède pas d'extension de degré 2.
3. Soit K_0 une extension finie de $\mathbf{C}$. Montrer qu'il existe une extension finie $K|K_0$ telle que l'extension $K|\mathbf{R}$ soit galoisienne.
4. Notons alors G le groupe de Galois de l'extension $K|\mathbf{R}$. Soit H un 2-sous-groupe de Sylow de G. Notons L le sous-corps de K formé par les éléments invariants par H. En termes des ordres des groupes G et H, quel est l'ordre de l'extension $L|\mathbf{R}$?
5. Montrer qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = \mathbf{R}(\alpha)$ et α racine d'un polynôme irréductible de degré impair de $\mathbf{R}[X]$.
6. En déduire que $\alpha \in \mathbf{R}$ puis que G est un 2-groupe.
7. Montrer que l'extension $K|\mathbf{C}$ est galoisienne. Notons G_1 son groupe de Galois. Montrer que c'est un 2-groupe.
8. Soit G_2 un sous-groupe d'indice 2 de G_1. Notons L_2 le sous-corps de K formé par les éléments invariants par G_2. Quel est le degré de l'extension $L_2|\mathbf{C}$? En déduire que G_1 n'a pas de sous-groupe d'indice 2. Conclure à l'aide de **I**.