Université Paris 7-Denis Diderot
Licence de mathématiques et informatique

Algèbre et Géométrie
Année 2003-04
M. Fouquet, L. Merel

EXAMEN du 17 juin 2004

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

I

Posons $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
1. Le polynôme $P(X) = X^3 - X + 1$ possède-t-il des racines dans $\mathbf{F}_3$?
2. Est-il irréductible sur $\mathbf{F}_3$?
3. L'idéal $(X^3 - X + 1)$ de $\mathbf{F}_3[X]$ engendré par ce polynôme est-il principal ? Est-il premier ?
4. Montrer que l'anneau $\mathbf{F}_3[X]/(X^3 - X + 1)$ est un corps à 27 éléments. Notons le $\mathbf{F}_{27}$.
5. Soit x_0 une racine de P. Montrer que $x_0 + 1$ et $x_0 - 1$ sont des racines de P.
6. En déduire que P est scindé sur $\mathbf{F}_{27}$.
7. Quel est le degré de l'extension $\mathbf{F}_{27}|\mathbf{F}_3$?
8. Quel est l'ordre du groupe multiplicatif $\mathbf{F}_{27}^*$?
9. Donner la structure du groupe abélien $\mathbf{F}_{27}^*$.
10. Quel sont les ordres des éléments de $\mathbf{F}_{27}^*$?
11. Donner un générateur du groupe $\mathbf{F}_{27}^*$.
12. Quel est l'ordre de x_0^2 dans $\mathbf{F}_{27}^*$?

II

Soit un hexagone régulier du plan euclidien, de sommets A, B, C, D, E et F. On appelle isométrie (resp. déplacement) de l'hexagone une isométrie (resp. un déplacement) du plan laissant stable l'ensemble de ces sommets. Notons $\mathcal{S}_6$ le groupe symétrique sur 6 éléments.
1. Démontrer que les isométries (resp. les déplacements) de l'hexagone forment un groupe, noté G (resp. G^+).
2. Donner la liste des éléments de G et de G^+.
3. Démontrer qu'on a un homomorphisme de groupes $\phi : G \to \mathcal{S}_6$, obtenu en restreignant à $\{A, B, C, D, E, F\}$ (et en identifiant $\{A, B, C, D, E, F\}$ à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).
4. L'homomorphisme ϕ est-il injectif ? Est-il surjectif ?