Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Arithmétique
Année 2011-12
L. Merel

EXAMEN du 30 mai 2012

Durée : 3 h

L'usage de tout appareil électronique et de tout document autre que des notes de cours est interdit.

Exercice 1

1. Décomposer 2012 en produit de facteurs premiers.
2. Quel est l'ordre du groupe $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$?
3. Soit $x \in (\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$. Montrer que x engendre $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$ si et seulement si x modulo 4 engendre $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^*$ et x modulo 503 engendre $(\mathbf{Z}/503\mathbf{Z})^*$.
4. Montrer que tout élément de $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$ est d'ordre 1, 2, 251 ou 502. Combien y a-t-il d'éléments de chaque ordre ?
5. Combien le groupe $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$ compte-t-il de caractères ?
6. Combien le groupe $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$ compte-t-il de caractères quadratiques (c'est-à-dire à valeurs dans $\{-1,1\}$)? Lesquels sont pairs ?
7. Combien le groupe $(\mathbf{Z}/2012\mathbf{Z})^*$ compte-t-il de caractères primitifs ?
8. Soit p un nombre premier. Montrer que $p^{p-1} \equiv 1 \pmod{2012}$ si et seulement si $p^{p-1} \equiv 1 \pmod{503}$, ou encore si et seulement si l'ordre de p dans $(\mathbf{Z}/503\mathbf{Z})^*$ divise $p-1$.
9. En déduire que $p^{p-1} \equiv 1 \pmod{2012}$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \pmod{503}$ ou si $p \equiv 1 \pmod{251}$.
10. En déduire la densité de l'ensemble de nombres premiers $\{p/p^{p-1} \equiv 1 \pmod{2012}\}$.

Exercice 2

Pour n entier > 0, posons $\sigma(n) = \sum_{d|n, d>0} d$ (c'est la somme des diviseurs positifs de n). Considérons la série de Dirichlet $D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) n^{-s}$. Notons ζ la fonction de Riemann.
1. Soient n et m deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$.
2. Soient p un nombre premier et e un entier ≥ 0. Montrer que $\sigma(p^e) = (p^{e+1}-1)/(p-1)$.
3. Soit n un entier ≥ 1 de décomposition en produit de facteurs premiers donnée par $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$.Exprimer $\sigma(n)$ et calculer $\sigma(2012)$.
4. Montrer qu'on a l'identité de séries de Dirichlet $D(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)$.
5. En déduire que la série D converge sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C}/\Re(s) > 2\}$ et que D se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$.
6. Quels sont les pôles de D ? Montrer que ses zéros sont entiers < 0 ou de partie réelle dans l'intervalle $]0,2[$.
7. Pour k entier ≥ 1, notons p_k le k-ème nombre premier. Montrer que p_k est équivalent à $k\log(k)$ lorsque k tend vers l'infini.
8. Posons $n_k = p_1 p_2 \ldots p_k$. Montrer que la suite $(\sigma(n_k)/n_k)_{k\geq 1}$ tend vers l'infini.
9. Soit ϵ un nombre réel > 0. Montrer que $\sigma(n)/n^{1+\epsilon} \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Posons $\Delta(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s)$. Montrer qu'on a $\Delta(s) = -\Delta(2-s)$.