Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2019-20

E. Letellier, L. Merel

CONTRÔLE du 29 novembre 2019

Durée : 2h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit i une racine carrée de -1 dans $\mathbf{C}$. On rappelle que l'anneau $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib/a, b \in \mathbf{Z}\}$ est un anneau euclidien. On rappelle qu'on a une application $\mathrm{N} : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}$ qui à $a+ib$ associe $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$. Tout $\mathbf{Z}[i]$-module est un groupe et donc un $\mathbf{Z}$-module.

1. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}[i]$.
2. L'idéal de $\mathbf{Z}[X]$ engendré par 2 et X est-il principal ?
3. Donner un exemple de $\mathbf{Z}[X]$-module de type fini et sans torsion qui n'est pas libre.
4. L'anneau $\mathbf{Z}[X]/(X^2+1)$ est-il principal ?
5. Tout $\mathbf{Z}[X]$-module de torsion est-il un $\mathbf{Z}$-module de torsion ?
6. Tout $\mathbf{Z}[i]$-module de torsion est-il un $\mathbf{Z}$-module de torsion ?
7. Tout $\mathbf{Z}[i]$-module de torsion comme $\mathbf{Z}$-module est-il de torsion comme $\mathbf{Z}[i]$-module ?
8. Tout $\mathbf{Z}[i]$-module libre est-il un $\mathbf{Z}$-module libre ?
9. Tout $\mathbf{Z}[i]$-module libre de rang fini comme $\mathbf{Z}$-module est-il libre comme $\mathbf{Z}[i]$-module ?
10. Soit $a+ib \in \mathbf{Z}[i]$ un élément irréductible. Montrer que les facteurs invariants de $\mathbf{Z}[i]/(a+ib)$ comme $\mathbf{Z}$-module sont p ou (p,p), avec p nombre premier.

II

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

11. Montrer que l'anneau $\mathbf{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe à $\mathbf{C}$.
12. Quel est le polynôme minimal de u ?
13. Que vaut le déterminant de u^2 ? En déduire que n est pair.
14. Montrer que l'application $(P, v) \mapsto P(u)(v)$ fait de E un $\mathbf{R}[X]$-module, puis un $\mathbf{R}[X]/(X^2+1)$-module.
15. Quels sont les facteurs invariants de E comme $\mathbf{R}[X]$-module ?
16. Munir E d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $n/2$.
17. Montrer que u agit sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel E par multiplication par i ou par $-i$.
18. Quels sont les facteurs invariants de E comme $\mathbf{C}[T]$-module ?
19. Soit w un endomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de E. Montrer que cela revient à dire que w est $\mathbf{R}$-linéaire et commute à u.
20. On voit E comme un $\mathbf{C}[T]$-module (et comme un $\mathbf{R}[T]$-module) par l'application $(P, v) \mapsto P(w)(v)$. Supposons que E est isomorphe à $\mathbf{C}[T]/(T-z)$, avec $z \in \mathbf{C}$ non réel de conjugué $\bar{z}$. Montrer que E est ainsi isomorphe à $\mathbf{R}[T]/((T-z)(T-\bar{z}))$ comme $\mathbf{R}[T]$-module.