Université Paris Diderot
Master de Mathématiques

Algèbre
Année 2018-19
L. Merel, J.-F. Mestre

EXAMEN du 27 JUIN 2019

Durée : 3h

Tout appareil électronique et tout document sont interdits, exceptée une feuille manuscrite.

I

Soit A un anneau commutatif, M un A-module noethérien et u un morphisme surjectif $M \to M$ de A-modules.
1. Montrer que la suite des noyaux de u^n est croissante, pour n entier ≥ 1.
2. En déduire que u est injectif (et donc bijectif).
3. Si A est intègre et n'est pas un corps, existe-t-il une application linéaire injective et non surjective $A \to A$?

II

Soit n un entier > 0. Notons E_n l'ensemble des polynômes de $\mathbf{Z}[X]$ unitaires de degré n et dont toutes les racines sont de module 1. Soit m un entier. Notons Φ_m le m-ème polynôme cyclotomique.
1. Montrrer qu'il existe un entier n tel que $\Phi_m \in E_n$.
2. Soit ζ une racine de l'unité dans $\mathbf{C}$. Montrer que toutes les racines de son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ sont de module 1.
3. Montrer que E_n est fini.
4. Pour $P \in E_n$ de racines x_1, $x_2 ... x_n$, on note P_2 le polynôme unitaire de racines x_1^2, $x_2^2 .... x_n^2$. Montrer que $P_2 \in \mathbf{Z}[X]$ (on pourra considérer $P_2(X^2)$).
5. En déduire que pour tout i, il existe des entiers n_i et m_i distincts tels que $x_i^{2^{n_i}} = x_i^{2^{m_i}}$.
6. Montrer que les racines de P sont des racines de l'unité.

III

Soit K le corps de décomposition dans $\mathbf{C}$ de $X^8 - 2 \in \mathbf{Q}[X]$. Soient $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine primitive 8-ème de l'unité et $\alpha \in \mathbf{R}$ une racine 8-ème de 2.
1. Montrer que l'extension $K|\mathbf{Q}$ est galoisienne et que K contient le corps $\mathbf{Q}(\zeta)$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\zeta)$.
3. Que vaut $[\mathbf{Q}(\zeta) : \mathbf{Q}]$? L'extension $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$ est-elle cyclique ?
4. Donner ses sous-corps.
5. Montrer que l'extension $\mathbf{Q}(\alpha)|\mathbf{Q}$ est de degré 8.
6. Montrer qu'elle contient $\sqrt{2}$.
7. Montrer que $K = \mathbf{Q}(\alpha, \zeta)$.
8. Montrer que $[K : \mathbf{Q}] = 16$.
9. Montrer que le groupe de Galois G de $K|\mathbf{Q}$ admet un élément d'ordre 8 et un élément d'ordre 2 qui ne commutent pas.
10. Établir la liste des sous-groupes de G et des sous-corps correspondants.