Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2010-11
L. Merel

EXAMEN du 27 mai 2011

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

On désigne par $\Re(z)$ et $\Im(z)$ les parties réelles et imaginaires respectivement d'un nombre complexe z. On note $\mathcal{C}(a,r)$ le cercle de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$.

Exercice 1

1. La fonction $z \mapsto e^z - 1$ est-elle entière ?
2. Donner son développement de Taylor en 0 à l'ordre 3.
3. La fonction $z \mapsto z/(e^z - 1)$ est-elle méromorphe sur $\mathbf{C}$?
4. A-t-elle un pôle en 0 ?
5. Indiquer quels sont ses pôles. Forment-ils un ensemble sans point d'accumulation dans $\mathbf{C}$?
6. Donner son développement de Laurent en 0 à l'ordre 3.
7. Quel est le rayon de convergence de cette série ?
8. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,2)} dz/(e^z - 1)$, où $\int_{\mathcal{C}(0,2)}$ signifie l'intégration le long du chemin $t \mapsto 2e^{2i\pi t}$.

Exercice 2

Considérons la fonction d'une variable complexe $f : z \mapsto (i - 2z)/(iz + 2)$.
1. Montrer que c'est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$. Quels sont ses pôles ?
2. Montrer que si $|z| = 1$, on a $|f(z)| = 1$.
3. En déduire que si $z \in B(0,1)$, on a $f(z) \in B(0,1)$.
4. Montrer que f définit une bijection $B(0,1) \to B(0,1)$.
5. La fonction réciproque de f est-elle holomorphe sur $B(0,1)$?

Exercice 3

1. L'ensemble $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$ est-il ouvert dans $\mathbf{C}$?
2. Quels sont les points d'accumulation de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$?
3. Y a-t-il une fonction entière f distincte de l'exponentielle telle que $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbf{R})$?
4. Y a-t-il une fonction entière f distincte de l'exponentielle telle que $f(z) = e^z$ $(z \in 2i\pi\mathbf{Z})$?
5. Quelles sont les fonctions polynomiales f telle que $|f(z)| < |e^z|$ $(z \in \mathbf{C})$?

Exercice 4

Soit R un entier > 0. Considérons les chemins c_1, c_2, c_3 et c_4 de $\mathbf{C}$ donnés par les formules suivantes : $c_1(t) = R(t-1) - t/R$, $c_2(t) = -e^{-i\pi t}/R$, $c_3(t) = (1-t)/R + tR$ et $c_4(t) = Re^{i\pi t}$.
1. Représenter graphiquement ces chemins.
2. Montrer que le chemin c composé de c_1, c_2, c_3 et c_4 est un lacet.
3. Déterminer les pôles dans $\mathbf{C}$ et les résidus correspondants de $z \mapsto e^{iz}/z$.
4. Calculer $\int_c (e^{iz}/z)\, dz$.
5. Montrer que $\Im(\int_{c_1}(e^{iz}/z)\, dz + \int_{c_3}(e^{iz}/z)\, dz)$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin(x)/x)\, dx$ lorsque R tend vers l'infini.
6. Montrer que $\Im(\int_{c_2}(e^{iz}/z)\, dz)$ tend vers π lorsque R tend vers l'infini.
7. Montrer que $\int_{c_4}(e^{iz}/z)\, dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.
8. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin(x)/x)\, dx$.