Université Paris Diderot
Licence de Mathématiques

Fonctions analytiques
Année 2011-12
L. Merel

EXAMEN PARTIEL du 27 mars 2012

Durée : 3 h

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.

On désigne par $\Re(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z. On note $\mathcal{C}(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans $\mathbf{C}$.

I

1. Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que $|(1-z)/(1+z)| < 1$ si et seulement si $\Re(z) > 0$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction $z \mapsto (1-z)/(1+z)$. Quel est le rayon de convergence ?
3. Montrer que la fonction $z \mapsto (1-z)/(1+z)$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$. Quels sont ses pôles ?
4. Montrer qu'elle définit par prolongement par continuité une bijection de la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \infty$.
5. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,2)} ((1-z)/(1+z))\, dz$
6. Soit $r \in \mathbf{R}$, $r > 2$. Montrer que la fonction $z \mapsto (1-z)/(1+z)$ envoie le cercle $\mathcal{C}(1, r)$ bijectivement sur un cercle dont on précisera le rayon et le centre.

II

7. La fonction $z \mapsto (1-e^z)/(1+e^z)$ est-elle méromorphe sur $\mathbf{C}$? Quel est l'ensemble P de ses pôles ?
8. Donner le résidu en $z = i\pi$ de cette fonction. Donner le terme constant du développement de Laurent en $z = i\pi$.
9. Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,4)} ((1-e^z)/(1+e^z))\, dz$.
10. La fonction $z \mapsto (1-e^z)/(1+e^z)$ admet-elle une primitive sur $B(0, 1)$? Sur la boule $B(0, 4)$?
11. L'ensemble des nombres complexes de la forme $(1-e^z)/(1+e^z)$, avec $z \in \mathbf{C} - P$ est-il ouvert ?
12. Montrer qu'il existe $z_1 \in \mathcal{C}(0, 1)$ tel que $|(1-e^z)/(1+e^z| < |(1-e^{z_1})/(1+e^{z_1}|$ $(z \in B(0, 1))$.
13. Existe-il un polynôme F non nul tel que la fonction $z \mapsto F(z)(1-e^z)/(1+e^z)$ soit entière ?
14. Soit U un ouvert borné de $\mathbf{C}$. Existe-il un polynôme F tel que la fonction $z \mapsto F(z)(1-e^z)/(1+e^z)$ soit holomorphe sur U ?

III

15. La fonction $z \mapsto e^{(1-z)/(1+z)}$ est-elle méromorphe sur $\mathbf{C}$ (on s'intéressera au développement de Laurent en $z = -1$) ?
16. Quel est le rayon de convergence de son développement en série entière en $z = 1$?
17. Quel est l'ensemble E des nombres complexes où cette fonction prend la valeur 1 ?
18. Quelles sont les fonctions méromorphes f sur $\mathbf{C}$ telle que $f(z) = 1$ $(z \in E)$?
19. Soit $r \in \mathbf{R}$. Calculer $\int_{\mathcal{C}(1,r)} e^{(1-z)/(1+z)}\, dz$ lorsque $r < 2$.
20. Soit $r \in \mathbf{R}$. Calculer $\int_{\mathcal{C}(1,r)} e^{(1-z)/(1+z)}\, dz$ lorsque $r > 2$.