Université Paris 7-Denis Diderot
Maîtrise de mathématiques et informatique

Algèbre
Année 2004-05
L. Merel - P. Perrin

**EXAMEN du 27 janvier 2005**

**Durée : 3 h**

*L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est interdit.*

## I

Considérons le polynôme $P(X) = X^4 + 4X^2 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$. Soit $K$ un corps de décomposition de $P$ dans $\mathbf{C}$.

**1.** Pour quelle raison $P$ est-il irréductible sur $\mathbf{Q}$ ?
**2.** Démontrer que l'ensemble des racines de $P$ dans $\mathbf{C}$ est de la forme $\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\}$, avec $\alpha,\ \beta \notin \mathbf{R}$.
**3.** Démontrer que $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}(\alpha)$.
**4.** Démontrer que $\beta \in \mathbf{Q}(\alpha)$. En déduire que $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
**5.** Quel est le degré de l'extension $K|\mathbf{Q}$ ?
**6.** Montrer que l'extension $K|\mathbf{Q}$ est galoisienne. Quel est l'ordre de $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ ?
**7.** L'extension $K|\mathbf{Q}$ est-elle résoluble par radicaux ?
**8.** Montrer que l'application $G \to K$ qui à $\sigma$ associe $\sigma(\alpha)$ est injective.
**9.** Démontrer que la conjugaison complexe induit un élément $c$ de $G$ d'ordre 2. Posons $H = \{1, c\}$.
**10.** Quel est le sous-corps $K^H$ de $K$ formé par les invariants sous $H$ ?
**11.** Soit $\sigma \in G$ distinct de l'identité et de $c$. Démontrer que $\sigma(\alpha\beta) = -\alpha\beta$. En déduire que $\sigma$ est d'ordre 4.
**12.** Démontrer que $K$ admet un unique sous-corps de degré 2 sur $\mathbf{Q}$.

## II

**1.** Combien un 5-sous-groupe de Sylow du groupe symétrique $\mathcal{S}_{10}$ possède-t-il d'éléments ?
**2.** Décrire explicitement un tel sous-groupe de Sylow. Est-il abélien ?
**3.** Combien y a-t-il de tels sous-groupes de Sylow ?
**4.** Ces sous-groupes de Sylow sont-ils distingués dans $\mathcal{S}_{10}$ ?
**5.** Sont-ils contenus dans le groupe alterné $\mathcal{A}_{10}$ ?
**6.** Démontrer que tout 3-cycle de $\mathcal{S}_5$ est produit de 5-cycles.
**7.** En déduire que le sous-groupe $H_5$ de $\mathcal{S}_{10}$ engendré par ses 5-sous-groupes de Sylow contient tous les 3-cycles de $\mathcal{S}_{10}$.
**8.** Quel est le sous-groupe $H_5$ ?